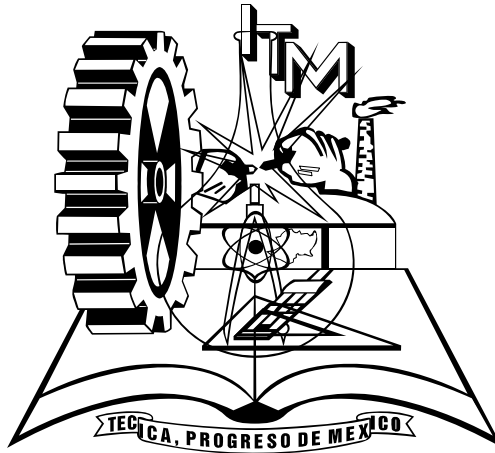
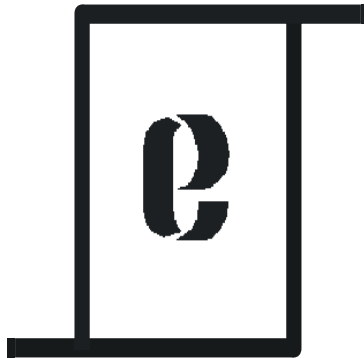


INSTITUTO TECNOLOGICO DE MORELIA

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA



TEORIA ELECTROMAGNETICA



Miguel Orozco Escutia

Aquello que ha sido es lo que será ... y lo
que se ha hecho lo que se volverá a hacer.
Nada hay nuevo bajo el sol.

ECLESIASTES 1:9

I N D I C E

I	ANALISIS VECTORIAL	1
1.1	Escalares y vectores	1
1.2	Campos	2
1.3	Algebra vectorial	4
1.4	Otros sistemas coordenados	11
II	CAMPO ELECTROSTATICO	20
2.1	Ley de Coulomb y campo eléctrico para diferentes configuraciones de carga	
2.2	Ley de Gauss	31
2.3	Potencial eléctrico	48
2.4	Diferencia de potencial y potencial	50
2.5	Campo de potencial de una carga puntual	51
2.6	Campo de potencial de un sistema de cargas puntuales	52
2.7	Gradiente de potencial	56
2.8	Energía y densidad de energía	60
2.9	Ecuaciones de Laplace y de Poisson	63
III	CORRIENTE ELECTRICA INVARIANTE EN EL TIEMPO	65
3.1	Corriente y densidad de corriente	65
3.2	Divergencia de \mathbf{J} y relación de continuidad de la corriente	66
3.3	Conductores y aisladores	67
3.4	Resistividad, conductividad y ley de Ohm	68
3.5	Dieléctricos polarización y capacitores	70
IV	CAMPO MAGNETOSTATICO	79
4.1	Campo magnético producido por corrientes invariantes en el tiempo	79
4.2	Efecto del campo magnético sobre una carga eléctrica	80
4.3	Efecto del campo magnético sobre un conductor que porta una corriente eléctrica	80
4.4	Fuerza y momento de torsión sobre un circuito cerrado	82
4.5	Campo magnético debido a un conductor recto de longitud infinita	83
4.6	Flujo magnético y densidad de flujo magnético	85
4.7	Ley de Gauss para campos magnéticos	85
4.8	Ley de Ampère	86
4.9	Intensidad del campo magnético \mathbf{H} y fuerza magnetomotriz \mathcal{F}	87
4.10	Inductancia e inductores	89
4.11	Propiedades de los materiales magnéticos	94
V	ECUACIONES DE MAXWELL	100
5.1	Ley de Faraday y primera ecuación de Maxwell	100
5.2	Ley de Gauss y segunda ecuación de Maxwell	102
5.3	Ley de Ampère y tercera ecuación de Maxwell	102
5.4	Flujo magnético y cuarta ecuación de Maxwell	104
5.5	Ecuaciones de Maxwell en medios materiales	105
VI	RELACION ENTRE LA TEORIA DE CIRCUITOS Y LAS ECUACIONES DE MAXWELL	107
6.1	Teoría de campo aplicada a circuitos eléctricos	107
6.2	Ecuaciones de Maxwell como una generalización de las ecuaciones de circuitos	111
6.3	Ecuaciones de Maxwell en campos con variación armónica	113

INTRODUCCION.

Sin tener datos que lo avalen, mi percepción en torno a la demanda de las carreras de Ingeniería y en especial de Ingeniería Eléctrica en el país es pobre en comparación con la demanda de carreras como Contabilidad y Administración, sin embargo para no correr el riesgo de equivocarme me referiré únicamente al Instituto Tecnológico de Morelia, del que si tengo información y donde la demanda de la carrera de Licenciatura en Administración es muy superior a la de cualquiera de las carreras de Ingeniería, esto significa que hay muchas más personas interesadas en administrar la riqueza que las interesadas en producirla, sin el ánimo de menospreciar el trabajo de los administradores, personalmente considero que es más difícil, con mucho, producirla que administrarla, amen de lo fascinante que pudiera resultar la comprensión de los fenómenos físicos que son el sustento de las carreras técnicas, lo anteriormente expuesto no tiene como finalidad motivar al lector a estudiar una carrera técnica ni mucho menos, dado que si está leyendo este texto es porque ya eligió Ingeniería Eléctrica o Electrónica, sino decirle que si su interés es encontrar una explicación a los fenómenos relacionados con la electricidad, desde su generación hasta su utilización, entonces ha elegido correctamente su carrera, no importa que no sea una carrera snob. El presente trabajo tiene como finalidad facilitar la comprensión de los fenómenos electromagnéticos que son la base de la operación de los sistemas y dispositivos eléctricos y electrónicos.

En el área de la Física y en particular del electromagnetismo existe una amplísima bibliografía, entonces, ¿porqué otro libro? , si a eso le sumamos que por muchos años las leyes de la Física han permanecido inalteradas, definitivamente la percepción parece ser de que un nuevo libro en absoluto es necesario, entonces ¿a qué se debe la necesidad del autor?. Primero, este libro contiene la totalidad exacta de los temas del programa de estudio de la asignatura “Teoría Electromagnética” establecida en los planes de estudio de las carreras de Ingeniería Eléctrica e Ingeniería Electrónica que se ofrece en el sistema de Institutos Tecnológicos del país, con esto se evita que los estudiantes se distraigan con el excesivo trabajo de tomar notas en clase, aunque siempre habrá detalles que el estudiante considere relevante resaltar, segundo, y aunque nada hay nuevo bajo el sol según se dice en Eclesiastés I:9, si existen puntos de vista diferentes, es decir, maneras de ver, decir y hacer las cosas, de una manera diferente, por lo que considero importante que se tenga un libro hecho por alguien que ha estudiado, pero sobre todo trabajado en el sistema de IT's por más de 28 años e impartido la asignatura de carreras los anteriores 8 años al inicio de esta escritura, y por lo tanto conoce, al menos a priori, la situación académica de los estudiantes, tercero y último este trabajo pretende justificar el año sabático del autor.

Aún cuando el libro lleva dedicatoria especial para los alumnos del sistema de IT's de las carreras de Ingeniería Eléctrica y Electrónica y en especial para los del IT de Morelia, espero sea de utilidad a quien quiera interesarse por los temas aquí expuestos.

CAPITULO I

ANALILISIS VECTORIAL

1.1 Encalares y vectores

En las ciencias y en las ingenierías, las cantidades físicas, que quedan descritas totalmente con una parte informativa (su magnitud), son llamadas *escalares*.

Una cantidad escalar verdadera es, por ejemplo, el valor de la temperatura en un punto determinado.

Generalmente las cantidades escalares relacionadas con ideas físicas, expresan la razón entre el tamaño de la cantidad y el tamaño de una cantidad escogida como patrón de las mediciones. Por ejemplo, la longitud de una cancha de fútbol es aproximadamente de 100m; es decir su longitud es 100 veces la longitud de un metro, que es la unidad de longitud.

Otros ejemplos de cantidades escalares son el volumen, el voltaje, el tiempo y la corriente. El concepto de escalar no se restringe a los números reales, ya que por ejemplo también incluye a los números complejos. La ingeniería y la ciencia también tratan con cantidades que requieren de dos partes de información: magnitud y dirección, las cantidades físicas de tal naturaleza se llaman cantidades vectoriales.

La palabra dirección es a veces reemplazada por dirección y sentido para denotar que un vector es un segmento de recta orientado en un sentido particular. Para ilustrar el concepto de vector consideramos el siguiente ejemplo. Si se dice que una persona está a 500m de cierto árbol, no se tiene también localizada a esa persona, pero si se dice además que está en la dirección noreste-sureste y también se da el sentido sobre la dirección dicha persona quedará plenamente localizada. En otras palabras, la posición de una persona relativamente a un punto de referencia, es una magnitud vectorial, y si desea localizar, se debe especificar la magnitud, la dirección y el sentido del vector que va del punto de referencia hacia la persona que es el objeto de la cantidad vectorial.

Una cantidad vectorial es a menudo representada gráficamente por un segmento de recta dibujada en una dirección determinada, con una punta de flecha en uno de sus extremos para indicar su sentido. La longitud de ese segmento de recta es representativo de la magnitud de la cantidad vectorial, es escala preescrita; la orientación del segmento es característica de la dirección y la cantidad vectorial y la punta de la flecha indica el sentido de la cantidad vectorial.

Las cantidades vectoriales que se presentan en los fenómenos físicos se clasifican de la manera siguiente a) vectores libres; b) vectores deslizantes; y c) vectores fijos o puntuales

Los vectores libres pueden ser trasladados de un punto a otro del espacio, siempre que tal traslación corresponda a un movimiento rígido que lleve el vector de la posición a otra paralela y que además no le cambie la magnitud ni el sentido. La geometría usualmente considera vectores libres.

Un vector deslizante tiene una línea de acción única, a lo largo de la cual puede actuar. La fuerza aplicada a un objeto al jalarlo para que lleve una velocidad constante es un ejemplo de vector deslizante.

Un vector fijo o puntual es el asociado a un punto particular del espacio. Si consideramos un cuerpo elástico, el punto de aplicación de la fuerza es muy importante dado que si lo aplicamos en un lugar determinado, podemos comprimirlo mientras que si aplicamos en otro lugar, posiblemente lo estiremos de este tipo de vectores es del que nos ocuparemos cuando discutamos campos vectoriales.

1.2 Campos.

Ahora que conocemos las cantidades físicas (escalares y vectores) podemos estudiar situaciones en que estas cantidades varían de un punto a otro del espacio. Cuando una cantidad física, es una función puntual de una región del espacio, esto constituye un campo, si la cantidad física es un escalar, se tratará de un campo escalar, si esta cantidad es vectorial, se tratará de un campo vectorial.

Campos escalares.

Supongamos que deseamos conocer la distribución estacionaria de temperatura de una hoja delgada de aluminio debajo de la cual se a colocado una mechero de Bunsen y en cuyas aristas se dispone de hilo constantemente, de tal modo que la temperatura en ellas es siempre de cero grados centígrados (Fig. 1.2.1) después de un tiempo suficientemente largo, como para que la temperatura no cambie en los puntos de la lámina, podemos determinar la temperatura en cualquier punto de la lámina por medio de un termopar. Podremos entonces registrar la temperatura en muchos puntos de la lámina, describiendo la posición el punto por medio de un sistema de coordenadas rectangulares cuyo origen sea el centro de la lámina, así podremos registrar la temperatura en cada punto y la posición de él, como se muestra en la tabla 1.2.1.

Posición (centímetros)		Temperatura °C
x	y	
-20	-20	0
-15	-15	15
-10	-10	25
0	0	150
10	20	16
15	20	10
20	10	7
20	5	0

Tabla 1.2.1 Temperatura en varios puntos de la lámina

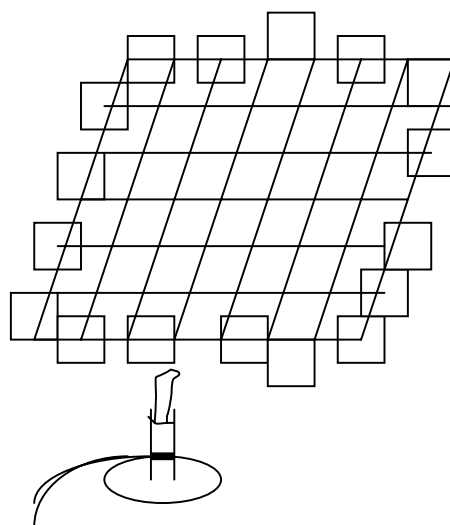


Figura 1.2.1

Todos estos datos que describen la temperatura en ciertos puntos y la localización de estos, constituyen un campo escalar de temperatura. Evidentemente un campo escalar no está limitado a campos de temperatura.

Campos vectoriales.

Podemos considerar un campo vectorial como una región del espacio, en cada punto de la cuál está definida una cantidad vectorial.

Un ejemplo de campo vectorial de dos dimensiones lo constituye la velocidad instantánea de la superficie del agua de un río o de una corriente cualquiera. Después de definir un sistema de coordenadas que describan la posición de los puntos en la superficie del agua y de determinar una forma consistente o definida de especificar el sentido y la dirección, que floten en la superficie. Los datos resultantes se pueden tabular en la manera como se muestra en la tabla 1.2.2.

Posición (metros)		Velocidad superficial del agua (m/s)	
x	y	<u>Magnitud</u>	Dirección desde el norte (medida en el sentido horario)
6.0	3	6.2	6°
4.37	-8.29	1.3	94°
-8.5	7.3	8.6	163°
41.0	-9.0	0.4	94°
2.9	-5.8	0.9	68°

Tabla 1.2.2

Existen métodos gráficos para la descripción de un campo vectorial, uno de los más comúnmente usados, es el representado en la figura 1.2.2, en el que cada flecha es representativa de la magnitud, dirección y sentido de la velocidad en ese punto.

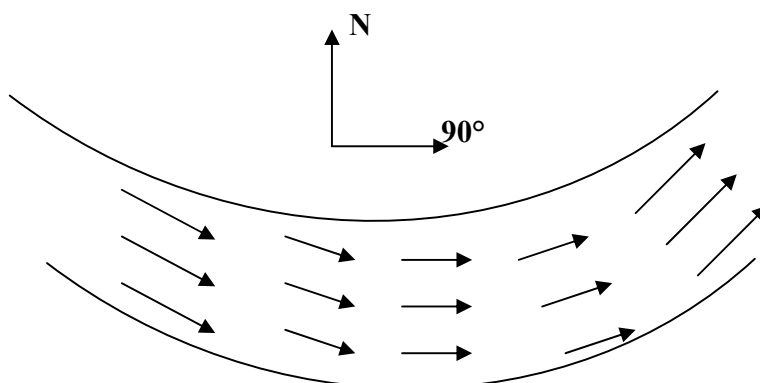


Figura 1.2.2

1.3 Álgebra vectorial

Suma y resta de vectores.

Antes de discutir la suma y resta de vectores debemos definir lo que se entiende por igual cuando tratamos con vectores y campos vectoriales.

Se dice que dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} son iguales ($\mathbf{A} = \mathbf{B}$), cuando ellos tienen la misma magnitud, dirección y sentido, esto no implica que \mathbf{A} y \mathbf{B} sean coincidentes en el espacio. Los vectores libres \mathbf{A} y \mathbf{B} mostrados en la figura 1.3.1, por lo tanto son iguales.

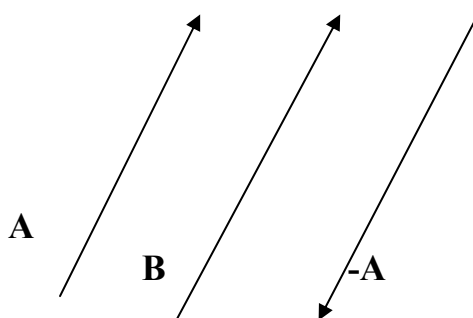


Figura 1.3.1

Dos campos vectoriales son iguales en una región del espacio cuando son iguales en todos los puntos de la misma. Como los campos vectoriales forman un conjunto de vectores fijos, la igualdad de los campos implica la coincidencia de tales vectores fijos.

La suma \mathbf{C} de dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B}

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad (1.3.1)$$

Se obtiene moviendo el vector \mathbf{B} paralelamente a sí mismo, hasta que su punto inicial coincida con el final de \mathbf{A} ; en el vector \mathbf{C} , que une el punto inicial de \mathbf{A} con el final de \mathbf{B} , es la suma vectorial de los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} . Como puede verse en la figura 1.3.2

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (1.3.2)$$

Esto es, si construimos un paralelogramo cuyos lados sean los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} , el vector diagonal \mathbf{C} que va del punto inicial de \mathbf{A} al final de \mathbf{B} , es el mismo vector que va del punto inicial de \mathbf{B} al final de \mathbf{A} . Se concluye que la suma vectorial es *conmutativa*.

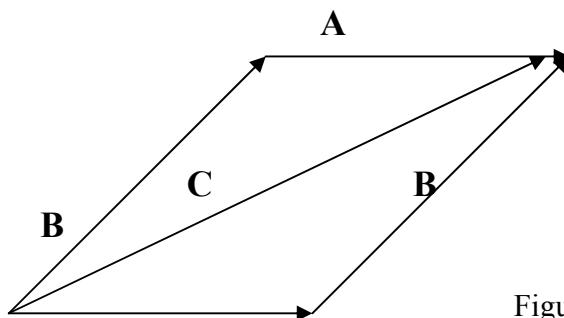


Figura 1.3.2

Si deseamos sumar otro vector \mathbf{D} a $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, procedemos como antes.

$$\mathbf{E} = \mathbf{D} + \mathbf{C} = \mathbf{D} + (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \quad (1.3.3)$$

El agrupamiento de vectores puede ser cambiado sin alterar el resultado.

$$\mathbf{E} = (\mathbf{D} + \mathbf{A}) + \mathbf{B} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \quad (1.3.4)$$

Por lo tanto la ley asociativa se cumple para vectores.

La resta de un vector \mathbf{B} de otro vector \mathbf{A} puede ser considerada como la suma de los vectores \mathbf{A} y $(-\mathbf{B})$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \quad (1.3.5)$$

Esto puede ser interpretado geoméricamente como se muestra en la figura 1.3.3. si dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} se dibujan con un punto inicial común, la diferencia $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ es el vector \mathbf{C} que va del punto final de \mathbf{B} al punto inicial de \mathbf{A} , tal que se cumple que

$$\mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{A} \quad (1.3.6)$$

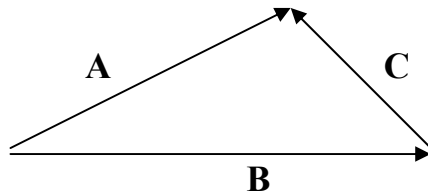


Figura 1.3.3

Multiplicación de vectores

Multiplicación de un vector por un escalar.

Si al vector \mathbf{A} le sumamos el vector \mathbf{B} y $\mathbf{B} = \mathbf{A}$, obtenemos $\mathbf{A} + \mathbf{A} = 2\mathbf{A}$, si sumamos tres veces el vector \mathbf{A} , obtendremos $3\mathbf{A}$, y en general si sumamos m veces el vector \mathbf{A} , obtendremos $m\mathbf{A}$ que será un vector en la dirección \mathbf{A} , $m > 0$ o en sentido opuesto si $m < 0$. La magnitud del vector $m\mathbf{A}$ es m veces la del vector \mathbf{A} . Si $m = 0$ obtendremos el vector cero, que es un vector de magnitud cero y que tiene cualquier dirección, esto se considera paralelo a cualquier vector.

Si m es un escalar y \mathbf{C} es un vector dado por la ecuación 1.3.1, entonces

$$m\mathbf{C} = (m\mathbf{A} + m\mathbf{B}) = m\mathbf{A} + m\mathbf{B} \quad (1.3.6)$$

Esto puede calcularse de manera geométrica.

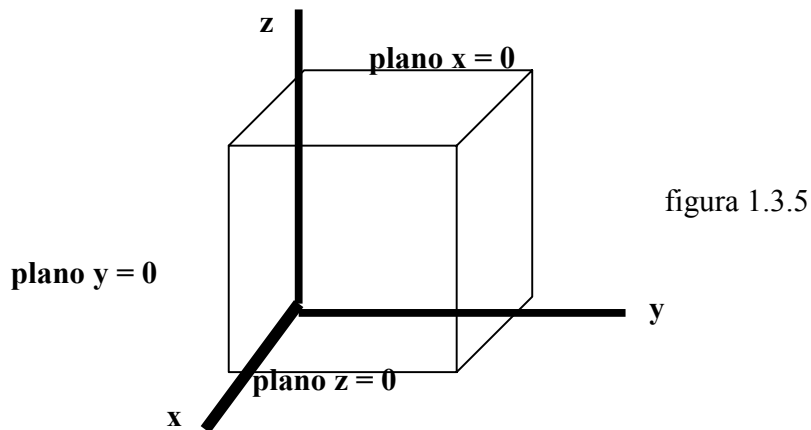
Si el escalar m está dado por $m = p + q$, donde p y q son escalares, entonces,

$$m\mathbf{A} = (p + q)\mathbf{A} = p\mathbf{A} + q\mathbf{A} \quad (1.3.7)$$

Sistema de coordenadas cartesianas o rectangulares

Se forma escogiendo primero un origen, por él pasamos tres planos mutuamente perpendiculares, llamados planos de referencia, a los cuales se les llama $x = 0$,

$y = 0, z = 0$. las rectas de intersección de estos planos son también mutuamente perpendiculares y se llaman los ejes x, y, z . Un sistema coordenado de este tipo se muestra en la figura 1.3.5 y se le llama sistema derecho.

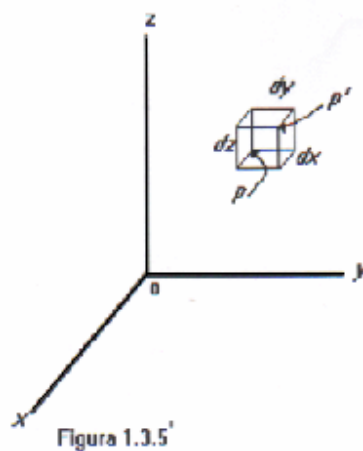


Para localizar un punto “ p ” en un sistema de coordenadas rectangulares, debemos pasar por “ p ” tres planos mutuamente perpendiculares que sean normales a los planos de referencia (ver figura 1.3.5). Las distancias del origen a los puntos en que los planos que pasan por “ p ” a los ejes son llamadas las coordenadas x,y,z del punto p . En tal sistema el punto “ p ” es denotado $p(x, y, z)$.

Si a las coordenadas del punto “ p ” de la figura 1.3.5, las incrementamos una cantidad diferencial, obtendremos la intersección de tres planos ligeramente desplazados que se interceptan en el punto p' cuyas coordenadas son $x+dx, y+dy, z+dz$. Los seis planos definen un paralelepípedo rectángulo cuyo volumen es

$$dv = dx dy dz \quad (1.3.8)$$

Las superficies tienen áreas diferenciales ds de $dx dy, dy dz, dx dz$. La distancia dL de p a p' es la diagonal de paralelepípedo y tiene una longitud $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$. Esto se muestra en la figura 1.3.5'



Componentes Vectoriales y Vectores Unitarios.

Para describir un vector en coordenadas cartesianas, se considera primero un vector \mathbf{r} que se extiende desde el origen hacia fuera (ver figura 1.3.6a). Una forma lógica de identificar este vector es por medio de sus vectores componentes, que se encuentran a lo largo de los tres ejes de coordenadas, cuya suma debe de ser el vector dado. Si los vectores componentes del vector \mathbf{r} son r_x, r_y, r_z , como se muestra en la figura 1.3.6b, en lugar de un vector, ahora tendremos tres, pero de naturaleza muy simple, ya que cada uno siempre está dirigido a lo largo de los ejes coordenados.

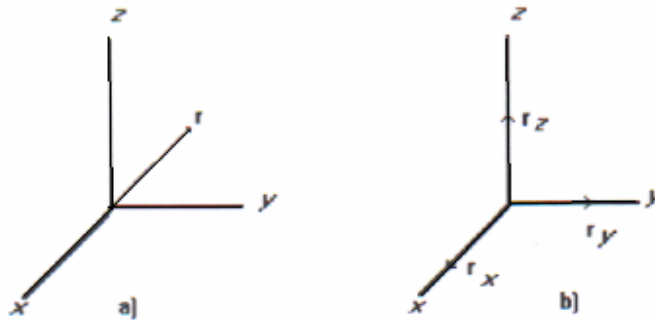


Fig.1.3.6

Esto es, los vectores componentes tienen una magnitud que depende del vector dado, pero cada uno tiene una dirección conocida y constante. Esto sugiere el uso de vectores unitarios, que por definición tienen, magnitud unitaria y están dirigidos a lo largo de los ejes coordenados, en la dirección en la cual las coordenadas se incrementan. El símbolo $\hat{\mathbf{a}}$ es utilizado para vectores unitarios y se identificará su dirección por medio de un subíndice. Por lo tanto $\hat{\mathbf{a}}_x, \hat{\mathbf{a}}_y, \hat{\mathbf{a}}_z$, son los vectores unitarios en el sistema de coordenadas cartesianas y están dirigidos a lo largo de los ejes x, y, z como se muestra en la figura 1.3.7a.

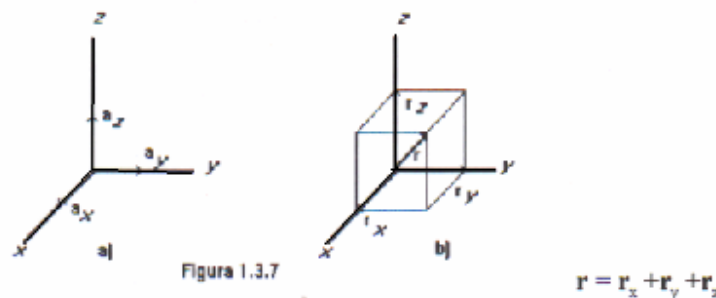


Figura 1.3.7

$$\mathbf{r} = r_x + r_y + r_z$$

Entonces si el vector \mathbf{r} apunta desde el origen hasta el punto $p(1, 2, 3)$, se expresa como

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{a}}_x + 2\hat{\mathbf{a}}_y + 3\hat{\mathbf{a}}_z \quad (1.3.9)$$

Cualquier vector \mathbf{B} puede entonces ser descrito por $\mathbf{B} = B_x \hat{\mathbf{a}}_x + B_y \hat{\mathbf{a}}_y + B_z \hat{\mathbf{a}}_z$. La magnitud de \mathbf{B} , escrita como $|\mathbf{B}|$, o, simplemente, B está dada por

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \quad (1.3.10)$$

Los vectores unitarios no se limitan a la aplicación de la ec. 1.3.9. A menudo resulta útil escribir un vector unitario que tiene una dirección especificada. Un vector unitario en una dirección dada, no es sino un vector en esa dirección, dividido entre su magnitud. Un vector unitario en la dirección del vector **B** es

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{B}/(|\mathbf{B}|) = (B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z) / \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \quad (1.3.11)$$

Producto Escalar o Producto Punto.

El producto punto de dos vectores **A** y **B** se define como el escalar dado por

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta_{AB} \quad (1.3.12)$$

y se lee **A** punto **B** donde θ_{AB} es el ángulo entre **A** y **B** medido de **A** a **B**. El producto escalar es conmutativo (ver figura 1.3.8), dado que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, esto puede comprobarse considerando que

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{B}| |\mathbf{A}| \cos \theta_{BA} \quad (1.3.13)$$

pero en la figura 1.3.8 podemos notar que $\theta_{AB} = \theta_{BA}$ de aquí que

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad (1.3.14)$$

además

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (1.3.15)$$

esto es el producto punto cumple con la ley distributiva.

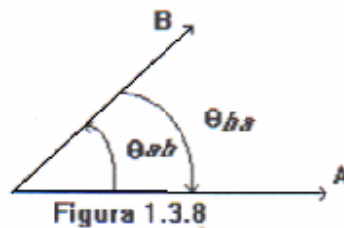


Figura 1.3.8

Si $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, entonces de las ecs. 1.3.14 y 1.3.13 se desprenden que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}| |\mathbf{A}| \cos \theta = |\mathbf{A}| |\mathbf{A}| = \mathbf{A}^2 \quad (1.3.16)$$

si **A** es perpendicular a **B**, $\cos \theta_{AB} = 0$ y por lo tanto,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.3.17)$$

El producto de $|\mathbf{B}|$ y $\cos \theta_{AB}$, representa la magnitud de la componente de **B** en la dirección de **A** y $|\mathbf{A}| \cos \theta_{AB}$ es la magnitud de **A** en la dirección de **B**, como puede observarse en la figura 1.3.9.

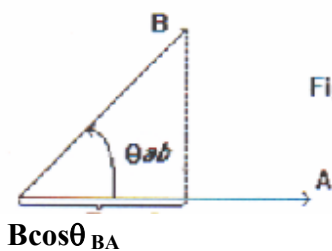


Figura 1.3.9

$B \cos \theta_{BA}$

Entonces $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ puede ser interpretado como la magnitud de la componente de \mathbf{B} sobre \mathbf{A} por $|\mathbf{A}|$ o, equivalentemente, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ podemos considerarlo como la magnitud de la componente de \mathbf{A} a lo largo de la dirección de \mathbf{B} por $|\mathbf{B}|$.

Si los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} , son expresados en función de sus componentes y de los vectores unitarios correspondientes en coordenadas rectangulares tendremos

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_x \hat{\mathbf{a}}_x + A_y \hat{\mathbf{a}}_y + A_z \hat{\mathbf{a}}_z) \cdot (B_x \hat{\mathbf{a}}_x + B_y \hat{\mathbf{a}}_y + B_z \hat{\mathbf{a}}_z) \quad (1.3.18)$$

Dado que $\hat{\mathbf{a}}_x \cdot \hat{\mathbf{a}}_y = \hat{\mathbf{a}}_x \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = \hat{\mathbf{a}}_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = 0$ y considerando la conmutatividad del producto punto

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_x B_x \hat{\mathbf{a}}_x \cdot \hat{\mathbf{a}}_x + A_y B_y \hat{\mathbf{a}}_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_y + A_z B_z \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_z) \quad (1.3.19)$$

pero $\hat{\mathbf{a}}_x \cdot \hat{\mathbf{a}}_x = \hat{\mathbf{a}}_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_y = \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = 1$

luego $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.3.20)$

entonces $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad (1.3.21)$

Producto Vectorial o Producto Cruz

El producto vectorial de dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} se define como el vector

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{a}}_n |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \text{sen} \theta_{ab} \quad (1.3.22)$$

que se lee “ \mathbf{A} cruz de \mathbf{B} “, donde $\hat{\mathbf{a}}_n$ es un vector unitario normal al plano que contiene \mathbf{A} y \mathbf{B} y que apunta en la dirección en que un tornillo derecho avanzaría si se girase de tal modo que \mathbf{A} rotara hacia \mathbf{B} a través del ángulo más pequeño que hay entre ambos vectores, esto implica que $0 \leq \theta \leq \pi$ (ver figura 1.3.10).

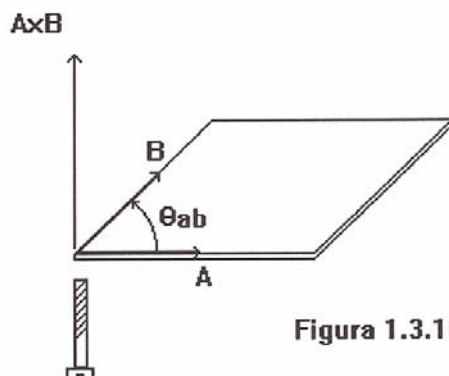


Figura 1.3.10

El producto vectorial no es conmutativo, o sea,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}'_n /A//\mathbf{B}/ \text{sen}\theta_{ab} \quad (1.3.23)$$

de donde se desprende según la definición del producto cruz, que $\hat{\mathbf{a}}'_n$ tiene sentido opuesto a $\hat{\mathbf{a}}_n$; así que $\hat{\mathbf{a}}'_n = -\hat{\mathbf{a}}_n$, y por lo tanto

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (1.3.24)$$

En el producto cruz se cumple la ley distributiva, de modo que,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (1.3.25)$$

si \mathbf{A} es normal a \mathbf{B} entonces

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{a}}_n /A//\mathbf{B}/ \quad (1.3.26)$$

Si \mathbf{A} es paralelo a \mathbf{B} , entonces

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0 \quad (1.3.27)$$

Inversamente si decimos que $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$, entonces cualesquiera de las cosas siguientes pueden suceder: $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{B} = 0$, o \mathbf{A} es paralelo a \mathbf{B} . Por consiguiente el producto cruz de un vector consigo mismo es cero.

El producto vectorial de dos vectores, puede ser interpretado geoméricamente como el área de un paralelogramo. En la figura 1.3.11 la altura "h" del paralelogramo está dada por

$$h = /B/ \text{sen}\theta_{ab} \quad (1.3.28)$$

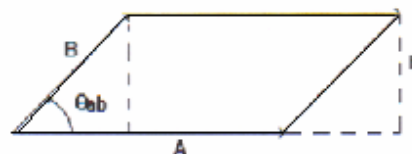


Figura 1.3.11

entonces $/\mathbf{A} \times \mathbf{B}/$ representa la magnitud del área del paralelogramo. El hecho de que ésta área esté representada por el vector $\hat{\mathbf{a}}_n /A/ h = \hat{\mathbf{a}}_n /A/ /B/ \text{sen}\theta_{ab}$, indica la consistencia de que un área es una cantidad vectorial cuya dirección es normal al plano.

El producto vectorial de dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} puede ser escrito, en términos de sus componentes, esto es

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\hat{\mathbf{a}}_x A_x + \hat{\mathbf{a}}_y A_y + \hat{\mathbf{a}}_z A_z) \times (\hat{\mathbf{a}}_x B_x + \hat{\mathbf{a}}_y B_y + \hat{\mathbf{a}}_z B_z) \quad (1.3.29)$$

y dado que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_x \times \hat{\mathbf{a}}_x &= \hat{\mathbf{a}}_y \times \hat{\mathbf{a}}_y = \hat{\mathbf{a}}_z \times \hat{\mathbf{a}}_z = 0 \\ \hat{\mathbf{a}}_x \times \hat{\mathbf{a}}_y &= \hat{\mathbf{a}}_z = -\hat{\mathbf{a}}_y \times \hat{\mathbf{a}}_x \\ \hat{\mathbf{a}}_y \times \hat{\mathbf{a}}_z &= \hat{\mathbf{a}}_x = -\hat{\mathbf{a}}_z \times \hat{\mathbf{a}}_y \\ \hat{\mathbf{a}}_z \times \hat{\mathbf{a}}_x &= \hat{\mathbf{a}}_y = -\hat{\mathbf{a}}_x \times \hat{\mathbf{a}}_z \end{aligned}$$

entonces la ecuación 1.3.29 se transforma en

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \hat{\mathbf{a}}_z A_x B_y - \hat{\mathbf{a}}_y A_x B_z - \hat{\mathbf{a}}_z A_y B_x + \hat{\mathbf{a}}_x A_y B_z + \hat{\mathbf{a}}_y A_z B_x - \hat{\mathbf{a}}_x A_z B_y \quad \text{ó} \\ \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \hat{\mathbf{a}}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \hat{\mathbf{a}}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \hat{\mathbf{a}}_z (A_x B_y - A_y B_x) \end{aligned}$$

la ecuación anterior puede ser escrita en forma de determinante de la manera siguiente

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{a}}_x & \hat{\mathbf{a}}_y & \hat{\mathbf{a}}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.3.30)$$

1.4 Otros sistemas de coordenadas.

Sistema de coordenadas cilíndricas.

La posición de un punto P también se puede especificar por medio de las coordenadas cilíndricas. La manera de construir este sistema de coordenadas es:

Se escoge arbitrariamente un origen O y por él pasamos un plano de referencia; sobre este plano de referencia, trazamos una recta de referencia, indicando su sentido positivo.

Las tres coordenadas de P se determinan pasando por P tres superficies mutuamente perpendiculares; un plano paralelo al de referencia (que es la superficie $z = \text{constante}$); un plano que pase por OP, normal al plano de referencia (que será la superficie $\phi = \text{constante}$); y un cilindro circular recto cuyo eje es normal al plano de referencia y contiene al origen, (es la superficie $\rho = \text{constante}$) ver figura 1.4.1.

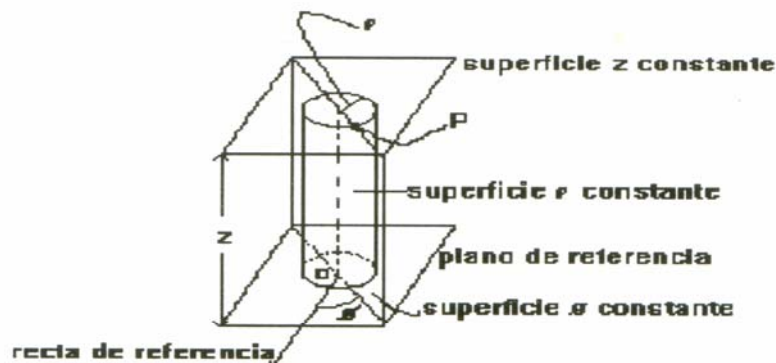


Figura 4.1.1

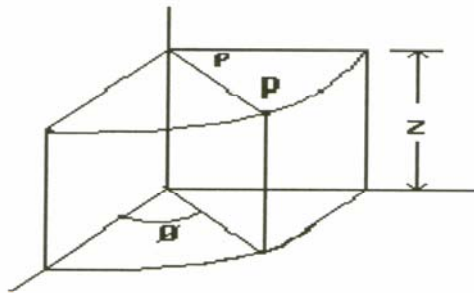


Figura 1.4.2

El radio " ρ " del cilindro es la coordenada radial de P.

El ángulo φ , es el ángulo entre la parte positiva de la recta de referencia y el plano que pasa por O y P, medido en el sentido antihorario. φ es la coordenada polar del punto P. La distancia más corta entre P y el plano de referencia, es la coordenada "z" del punto P.

Como puede verse cada punto del espacio puede considerarse como la intersección de tres superficies mutuamente perpendiculares. Estas son, un cilindro circular ($\rho = \text{cte.}$), un plano ($\varphi = \text{cte.}$) y otro plano ($z = \text{cte.}$).

Definiremos también tres vectores unitarios, pero no a lo largo de los ejes coordenados, puesto que dichos ejes solo existen en las coordenadas cartesianas, dichos vectores serán, \hat{a}_ρ , \hat{a}_φ , \hat{a}_z .

El vector unitario \hat{a}_ρ , en un punto $P(\rho_1, \varphi_1, z_1)$ está dirigido radialmente hacia afuera, normal a la superficie cilíndrica $\rho = \rho_1$. El vector unitario \hat{a}_φ normal al plano $\varphi = \varphi_1$, apunta en la dirección en que φ se incrementa y es tangente a la superficie cilíndrica $\rho = \rho_1$. El vector unitario \hat{a}_z es igual al vector unitario \hat{a}_z de las coordenadas cartesianas. La figura 1.4.3 muestra estos vectores unitarios. \hat{a}_φ y \hat{a}_ρ cambian de dirección, al construidos en diferentes puntos; lo que no sucede en coordenadas cartesianas, donde los tres vectores unitarios tienen direcciones constantes.

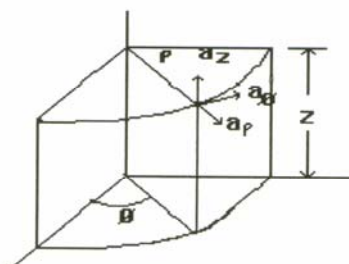


Figura 1.4.3

Se puede obtener un elemento diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas incrementando las coordenadas ρ , φ , z en los incrementos diferenciales $d\rho$, $d\varphi$, dz , las seis superficies encierran ahora el pequeño volumen representado en la figura 1.4.4 por una cuña truncada.

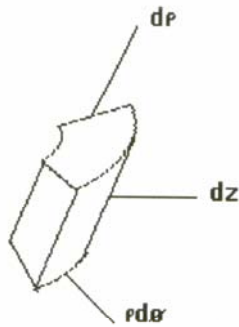


Figura 1.4.4

A medida que el elemento de volumen se hace más pequeño, su forma tiende a la de un paralelepípedo rectángulo que tiene de lados $d\rho$, $\rho d\phi$, dz . Por lo tanto las superficies tienen áreas de $\rho d\rho d\phi$, $d\rho dz$, $\rho d\phi dz$ y el volumen es $\rho d\rho d\phi dz$.

Sistema de coordenadas esféricas.

Se forma escogiendo un origen a través del cual pasamos un plano de referencia; hacemos pasar por el origen dos rectas perpendiculares entre si, una en el plano de referencia y otra perpendicular a él, les asignamos sentido positivo a ambas. Para localizar un punto P en tal sistema hacemos pasar por P y por el origen:

- 1.- Una esfera con centro en el origen y radio igual a la distancia del origen al punto P.
- 2.- Un plano normal al plano de referencia, llamado Φ , = constante, donde Φ es un ángulo medido en dirección contraria a las manecillas del reloj a partir de la dirección de la recta de referencia que está en el plano de referencia.
- 3.- Un cono con abertura igual a dos veces al ángulo θ , con vértice en el origen y cuyo eje es la parte positiva de la recta de referencia perpendicular a la plano de referencia; θ es medido en el plano Φ = constante, a partir de la recta de referencia normal al plano de referencia. Ver figura 1.4.5.

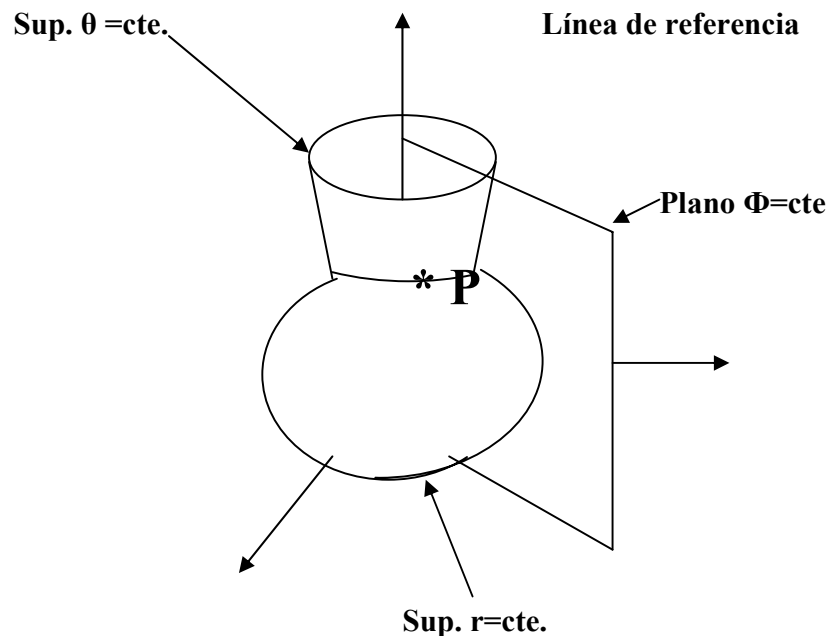


Figura 1.4.5

La estipulación de r, θ, ϕ , describe la posición de P en un sistema de coordenadas esféricas.

Cualquier punto debe considerarse como la intersección de tres superficies mutuamente perpendiculares, una esfera, un cono, y un plano (el plano $\Phi =$ constante).

De nuevo se pueden definir tres vectores unitarios. Cada vector unitario es perpendicular a una de las tres superficies antes consideradas y está orientada en la dirección en la que la coordenada crece.

El vector unitario $\hat{\mathbf{a}}_\theta$ es normal a la superficie cónica, tangente a la esfera y se encuentra en el plano $\Phi =$ constante. El vector unitario $\hat{\mathbf{a}}_r$ está dirigido radialmente hacia a fuera, es normal a la esfera y se encuentra en el plano $\Phi =$ constante y en el cono $\theta =$ constante. El vector unitario $\hat{\mathbf{a}}_\phi$ es el mismo de las coordenadas cilíndricas, siendo normal al plano $\Phi =$ constante y tangente tanto al cono como a la esfera.

Los tres vectores unitarios se muestran en la figura 1.4.6 y como puede verse son mutuamente perpendiculares.

Se puede construir un elemento diferencial de volumen incrementando r , θ , y Φ en dr , $d\theta$ y $d\phi$ respectivamente como se muestra en la figura 1.4.7. Las superficies tienen áreas de $rdrd\theta$, $r^2 \sin\theta d\theta d\phi$ y el volumen es $r^2 \sin\theta drd\theta d\phi$.

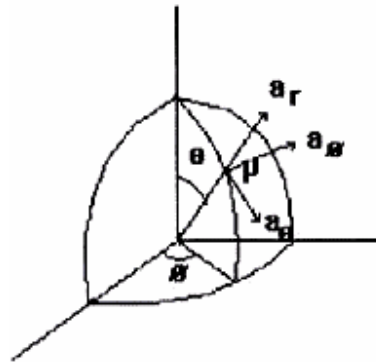


Figura 1.4.6

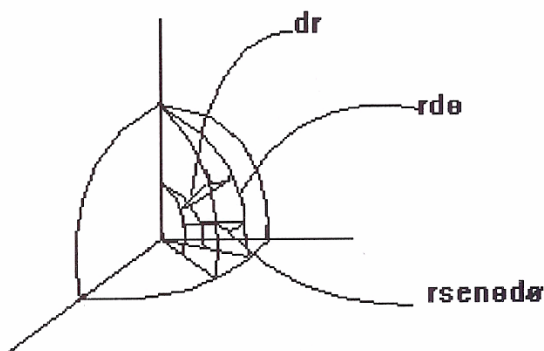


Figura 1.4.7

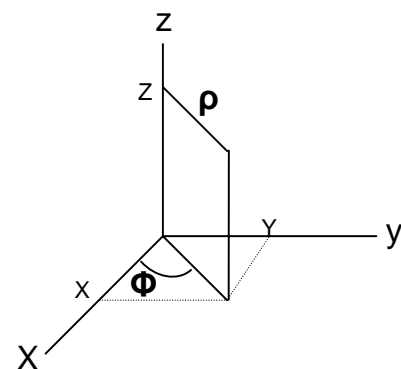


Figura 1.4.8

Transformación entre sistemas coordenados.

Cilíndricas a cartesianas y viceversa.

La transformación se hace por medio de un procedimiento de dos etapas:

- a) Cambiando las variables
- b) Cambiando las magnitudes de los componentes de un sistema al otro.

Sea el vector \mathbf{A} dado por $\mathbf{A}(\rho, \Phi, z) = \hat{\mathbf{a}}_\rho \mathbf{A}_\rho(\rho, \Phi, z) + \hat{\mathbf{a}}_\Phi \mathbf{A}_\Phi(\rho, \Phi, z) + \hat{\mathbf{a}}_z \mathbf{A}_z(\rho, \Phi, z)$ 1.4.1 y deseamos cambiar la representación del vector \mathbf{A} de modo que sus coordenadas sean cartesianas, esto es

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \hat{\mathbf{a}}_x \mathbf{A}_x(x, y, z) + \hat{\mathbf{a}}_y \mathbf{A}_y(x, y, z) + \hat{\mathbf{a}}_z \mathbf{A}_z(x, y, z) \quad 1.4.2$$

Si se establecen dos sistemas de coordenadas, como se ve en la figura 1.3.19, de tal manera que los planos $z = 0$ coincidan y el plano $y = 0$ sea el plano $\Phi = 0$, entonces existen las siguientes relaciones entre las variables en un punto general P:

$$\begin{aligned} X &= r\cos\Phi; & y &= \rho\sin\Phi; & z &= z \\ \rho^2 &= x^2 + y^2; & \text{tg}\Phi &= y/x; & z &= z \end{aligned} \quad 1.3.19$$

Así tenemos x, y, z en términos de ρ, Φ, z y ρ, Φ, z en términos de x, y, z . Se puede notar que no hay cambio en la variable z y que el vector unitario $\hat{\mathbf{a}}_z$ es el mismo en ambos sistemas.

Para ilustrar el cambio de variables consideremos el vector:

$$\mathbf{B} = z\hat{\mathbf{a}}_x + (1-x)\hat{\mathbf{a}}_y + (y/x)\hat{\mathbf{a}}_z \quad \text{según las ecuaciones (1.3.33), tenemos:}$$

$$\mathbf{B} = z\hat{\mathbf{a}}_x + (1-\rho\Phi)\hat{\mathbf{a}}_y + \text{tg}\Phi\hat{\mathbf{a}}_z$$

Ahora consideremos el cambio en las componentes, de inmediato puede notarse que los términos A_z en ambos sistemas es el mismo, ya que los vectores unitarios tienen el mismo significado en cada sistema.

Recordemos que se puede obtener una componente en una dirección deseada calculando el producto punto del vector por un vector unitario en esa dirección. Por lo tanto:

$$A_\rho = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{a}}_\rho \quad \text{y} \quad A_\phi = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{a}}_\phi$$

Desarrollando estos productos puntos se tiene:

$$\mathbf{A}_\rho = (A_x\hat{\mathbf{a}}_x + A_y\hat{\mathbf{a}}_y + A_z\hat{\mathbf{a}}_z) \cdot \hat{\mathbf{a}}_\rho = A_x\hat{\mathbf{a}}_x \cdot \hat{\mathbf{a}}_\rho + A_y\hat{\mathbf{a}}_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_\rho$$

$$\mathbf{A}_\phi = (A_x\hat{\mathbf{a}}_x + A_y\hat{\mathbf{a}}_y + A_z\hat{\mathbf{a}}_z) \cdot \hat{\mathbf{a}}_\phi = A_x\hat{\mathbf{a}}_x \cdot \hat{\mathbf{a}}_\phi + A_y\hat{\mathbf{a}}_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_\phi$$

Aplicando la definición del producto punto y con referencia a la figura 1.3.19 se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_x \cdot \hat{\mathbf{a}}_\rho &= \cos\Phi & \hat{\mathbf{a}}_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_\rho &= \cos(90^\circ - \Phi) = \sin\Phi \\ \hat{\mathbf{a}}_x \cdot \hat{\mathbf{a}}_\phi &= \cos(90^\circ + \Phi) = -\sin\Phi & \hat{\mathbf{a}}_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_\phi &= \cos\Phi \end{aligned}$$

Luego entonces:

$$A_\rho = A_x\cos\phi + A_y\sin\phi \quad \quad A_\phi = -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi$$

De tal manera que la expresión final para transformar el vector cartesiano \mathbf{A} al vector cilíndrico:

$$\mathbf{A} = (A_x\cos\phi + A_y\sin\phi)\hat{\mathbf{a}}_\rho + (-A_x\sin\phi + A_y\cos\phi)\hat{\mathbf{a}}_\phi + A_z\hat{\mathbf{a}}_z$$

Para completar el ejemplo del vector **B**, se aplica la ecuación anterior y se obtiene:

$$\mathbf{B} = [z \cos \varphi + (1 - \rho \cos \varphi) \operatorname{sen} \varphi] \hat{\mathbf{a}}_\rho + [-z \operatorname{sen} \varphi + (1 - \rho \cos \varphi) \cos \varphi] \hat{\mathbf{a}}_\varphi + \operatorname{tg} \varphi \hat{\mathbf{a}}_z$$

$$\mathbf{B} = (z \cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi - \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi) \hat{\mathbf{a}}_\rho + (-z \operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi - \rho \cos^2 \varphi) \hat{\mathbf{a}}_\varphi + \operatorname{tg} \varphi \hat{\mathbf{a}}_z$$

RELACION ENTRE LAS VARIABLES Y COMPONENTES DE LOS SISTEMAS DE COORDENADAS CARTESIANAS Y CILINDRICAS

CARTESIANAS A CILINDRICAS

CILINDRICAS A CARTESIANAS

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \varphi$$

$$z = z$$

$$A_\rho = A_x \cos \varphi + A_y \operatorname{sen} \varphi$$

$$A_\varphi = -A_x \operatorname{sen} \varphi + A_y \cos \varphi$$

$$A_z = A_z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$z = z$$

$$A_x = A_\rho \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - A_\varphi \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$A_y = A_\rho \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + A_\varphi \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$A_z = A_z$$

CARTESIANAS A ESFERICAS Y VICEVERSA

Esto se logra usando el mismo procedimiento que se uso para transformar de cartesianas a cilíndricas. De la figura 1.4.9

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

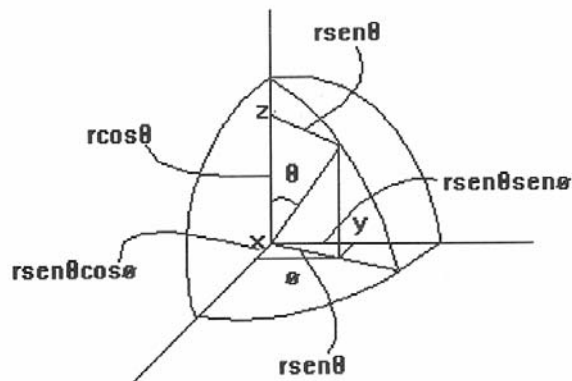


Figura 1.4.9

Para hacer la transformación de componentes se procede de manera similar a las coordenadas cilíndricas. De la definición del producto punto:

$$\hat{\mathbf{a}}_r \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = \hat{\mathbf{a}}_r \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = \cos \theta \quad \hat{\mathbf{a}}_\theta \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = \hat{\mathbf{a}}_\theta \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = \cos(\theta + 90^\circ) = -\text{sen} \theta \quad \hat{\mathbf{a}}_\phi \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = \hat{\mathbf{a}}_\phi \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = 0$$

$$\hat{\mathbf{a}}_\phi \cdot \hat{\mathbf{a}}_x = \cos(\Phi + 90^\circ) = -\text{sen} \Phi \quad \hat{\mathbf{a}}_\phi \cdot \hat{\mathbf{a}}_y = \cos \Phi$$

Los productos punto que comprenden $\hat{\mathbf{a}}_x$ y $\hat{\mathbf{a}}_y$ con los vectores $\hat{\mathbf{a}}_r$ y $\hat{\mathbf{a}}_\theta$ se efectúan descomponiendo los vectores $\hat{\mathbf{a}}_r$ y $\hat{\mathbf{a}}_\theta$ como la suma de dos vectores componentes, uno en la dirección “z” (a lo largo de la recta de referencia normal al plano de referencia), y otro en la dirección “p” (sobre el plano de referencia).

$$\hat{\mathbf{a}}_r \cdot \hat{\mathbf{a}}_x = \text{sen} \theta \cos \Phi \quad \hat{\mathbf{a}}_r \cdot \hat{\mathbf{a}}_y = \text{sen} \theta \text{sen} \Phi$$

$$\hat{\mathbf{a}}_\theta \cdot \hat{\mathbf{a}}_x = \cos \theta \cos \Phi \quad \hat{\mathbf{a}}_\theta \cdot \hat{\mathbf{a}}_y = \cos \theta \text{sen} \Phi$$

Con el afán de no coartar la iniciativa del lector que estará ansioso en deducir las expresiones que permiten hacer transformaciones, deduciremos únicamente dos de ellas.

$$A_r = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{a}}_r = (A_x \hat{\mathbf{a}}_x + A_y \hat{\mathbf{a}}_y + A_z \hat{\mathbf{a}}_z) \cdot \hat{\mathbf{a}}_r = A_x \text{sen} \theta \cos \Phi + A_y \text{sen} \theta \text{sen} \Phi + A_z \cos \theta$$

$$A_x = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{a}}_x = (A_r \hat{\mathbf{a}}_r + A_\theta \hat{\mathbf{a}}_\theta + A_\phi \hat{\mathbf{a}}_\phi) \cdot \hat{\mathbf{a}}_x = A_r \text{sen} \theta \cos \Phi + A_\theta \cos \theta \cos \Phi - A_\phi \text{sen} \Phi$$

Siguiendo un procedimiento similar podemos encontrar el resto de las transformaciones, sin embargo preferimos dejarlas para un domingo por la tarde, cuando los estudiantes de Ingeniería Eléctrica empiezan a ser presa del tedio y no tienen a la mano actividad alguna que sea capaz de espantarles el sueño.

Con todo el trabajo realizado el domingo de su preferencia se puede construir una tabla de x, y, z, A_x, A_y, A_z en función de $r, \theta, \phi, A_r, A_\theta, A_\phi$ y viceversa como se muestra a continuación.

CARTESIANAS A ESFERICAS

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$A_r = A_x \sin \theta \cos \phi + A_y \sin \theta \sin \phi + A_z \cos \theta$$

$$A_\theta = A_x \cos \theta \cos \phi + A_y \cos \theta \sin \phi - A_z \sin \theta$$

$$A_\phi = -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi$$

ESFERICAS A CARTESIANAS

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$A_x = A_r \sin \theta \cos \phi + A_\theta \cos \theta \cos \phi - A_\phi \sin \theta$$

$$A_y = A_r \sin \theta \sin \phi + A_\theta \cos \theta \sin \phi + A_\phi \cos \theta$$

$$A_z = A_r \cos \theta - A_\theta \sin \theta$$

CAPITULO II

CAMPO ELECTROSTATICO.

2.1 Ley de Coulomb y campo eléctrico para diferentes configuraciones de carga.

Las fuerzas eléctricas

Son fuerzas análogas a la de gravitación, pero son un billón de billón de billones de veces mas intensa. Y con otra diferencia. Hay dos tipos de materia que se han llamado positiva y negativa, si son de la misma clase se repelen y si son de distinta se atraen.

¿Si las fuerzas eléctricas son tan intensas por qué los protones y los electrones no están juntos, en una mezcla mas intima?

La respuesta tiene que ver con los efectos cuánticos.

¿Qué es lo que mantiene unido al núcleo de un átomo?

Dado que este esta constituido por protones y estos tienen el mismo tipo de carga.

¿Por qué no se apartan unos de otros?

Esto implica que hay otro tipo de fuerzas (de mayor magnitud) además de las eléctricas, estas son las fuerzas nucleares, pero decrecen mucho mas rápido que $1/r^2$.

Electrostática.

Ley experimental de Coulomb: La fuerza entre dos partículas muy pequeñas, separadas una distancia relativamente grande, en comparación con su tamaño, es proporcional a las cargas en las partículas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas y dicha fuerza yace a lo largo de la línea que une a dichas cargas. Esto puede expresarse por la ecuación:

$$F = K \frac{Q_1 Q_2}{R^2} \dots\dots(2.1.1)$$

Donde: Q_1 y Q_2 son las cantidades de cargas positiva o negativa en las partículas. Sus unidades son Coulombs (C).

R es la separación entre las partículas. (m)

K es la constante de proporcionalidad; F -fuerza (N)

Por razones históricas la constante de proporcionalidad se escribe como $K= 1/(4\pi\epsilon_0)$.

En el sistema de unidades MKS; K se define como exactamente igual a 10^{-7} por el cuadrado de la velocidad de la luz.

Como la velocidad de la luz es aproximadamente $3*10^8$ m/seg, la constante $K=9*10^9$ y las unidades según la ecuación de ley de Coulomb resulta ser $N\cdot m^2/C^2$ ó volt-m/C.

$$\begin{aligned} \text{Entonces } 1/(4\pi\epsilon_0) &= 10^{-7} \text{ C}^2 \text{ por definición} \\ &= 9*10^9 \end{aligned}$$

A la nueva constante ϵ_0 que aparece en la expresión se le denomina permitividad del medio (en este caso es aire o vacío) y se mide en F/m.

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} = [1 / (36\pi)] \times 10^{-9} \text{ F/m} \quad 1(\text{F/m}) = (\text{c}^2 / \text{Nm}^2)$$

Con esta nueva constante la expresión matemática de la Ley de Coulomb nos queda:

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (2.1.2)$$

$$1\bar{e} = -1.60219 \times 10^{-19} \text{ C} \iff 1\text{C} = 6 \times 10^{18} \bar{e}$$

Dado que la fuerza es una cantidad que tiene tanto magnitud, como dirección debemos expresar la ec.(2.2) en forma vectorial.

Sean las cargas Q_1 y Q_2 separadas una distancia R_{12} . Supóngase que el vector R_{12} representa el segmento rectilíneo dirigido desde Q_1 hasta Q_2 y que las cargas Q_1 y Q_2 son del mismo signo (no necesariamente). Además $\hat{\mathbf{a}}_{R_{12}}$ es un vector unitario en la dirección de R_{12} .

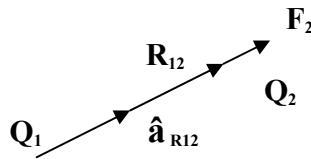


Figura 2.1.1

$$\hat{\mathbf{a}}_{R_{12}} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{|\mathbf{R}_{12}|} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}}$$

Entonces la forma vectorial de la ley de Coulomb nos queda:

$$\mathbf{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{\mathbf{a}}_{R_{12}} \quad (2.1.2)$$

La Ley de Coulomb cumple con el principio de linealidad y superposición.

Intensidad del campo eléctrico.

Si consideramos una carga Q_1 en una posición fija, y a su alrededor movemos una carga que llamaremos Q_t (de masa considerablemente menor que Q_1), podemos observar que en todas las partes existe una fuerza que actúa sobre esta carga Q_t ; esto implica que en la vecindad de la carga

Q_1 existe un campo de fuerzas, en donde la fuerza en cada punto estará dada por la ecuación de la Ley de Coulomb

$$\vec{F}_t = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \epsilon_0 R_{1t}^2} \hat{a}_{R1t} \quad (2.1.3)$$

La fuerza por unidad de carga será:

$$\frac{F_t}{Q_2} \hat{a}_{R1t} = \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_0 R_{1t}^2} \hat{a}_{R1t} \quad (2.1.4)$$

La intensidad del campo eléctrico se define como el vector de fuerza sobre una carga de prueba unitaria y positiva.

Según la expresión 2.1.4 el campo se debe medir en N/C sin embargo introduciremos una unidad que será explicada mas tarde y así mediremos el campo en (V/m).

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_t}{Q_t} \quad (2.1.5)$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_0 R_{1t}^2} \hat{a}_{R1t} \quad (2.1.6)$$

(2.5) Defina la intensidad de campo eléctrico y (2.6) defina la intensidad de campo eléctrico debido a una carga puntual Q_1 en un punto del espacio libre.

En general se tiene que

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^2} \hat{a}_R \quad (2.1.7)$$

Donde \vec{E} es el campo debido a la carga Q en el punto que se localiza a una distancia R de dicha carga y \hat{a}_R es un vector unitario en la dirección de un vector R que es el segmento de recta que va desde Q hasta el punto antes mencionado.

Nótese que la ec.(2.1.7) no esta restringida a un sistema de coordenadas en especial.

Podemos analizar dos cosas:

- a) Cuando la carga responsable del campo esta en el origen (de un sistema de coordenadas).
- b) Cuando la carga responsable del campo esta fuera del origen (de un sistema de coordenadas).

Para el primer caso la ec.(2.1.7) expresada en coordenadas esféricas será:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^2} \hat{a}_R$$

Y representa el campo en un punto a una distancia r del origen.

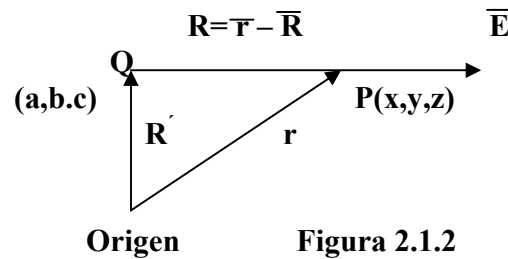
En coordenadas cartesianas será: $\vec{R} = \vec{r} = x \hat{a}_x + y \hat{a}_y + z \hat{a}_z$

$$\hat{a}_R = \hat{a}_r = \left[\frac{x \hat{a}_x + y \hat{a}_y + z \hat{a}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right]$$

y ∴

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)} \left(\frac{x \hat{a}_x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y \hat{a}_y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{z \hat{a}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

Como puede notarse, resulta mas sencillo expresar el campo en coordenadas esféricas, debido a la simetría que presenta. No resulta lo mismo cuando la carga esta fuera del origen, por ejemplo en el punto con coordenadas (a,b,c) y se desea expresar el campo en un punto cualquiera de coordenadas (x,y,z).



$$\hat{a}_R = \frac{\vec{r} - \vec{R}'}{|\vec{r} - \vec{R}'|} \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{R}'$$

Entonces $\vec{E} = \frac{Q(\vec{r} - \vec{R}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{R}'|^3} \dots\dots\dots(2.1.8)$

$$\vec{r} - \vec{R}' = (x-a) \hat{a}_x + (y-b) \hat{a}_y + (z-c) \hat{a}_z \dots\dots(2.1.9) \text{ y}$$

$$|\vec{r} - \vec{R}'| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} \dots\dots(2.1.10)$$

Sustituyendo las ec. (2.1.9) y (2.1.10) en (2.1.8) tendremos:

$$\vec{E} = \frac{Q[(x-a)\hat{a}_x + (y-b)\hat{a}_y + (z-c)\hat{a}_z]}{4\pi\epsilon_0 [(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{3/2}}$$

Campo debido a “n” cargas puntuales.

Puesto que el campo eléctrico debido a una carga es función lineal del valor de esta, se deduce que los campos de más de una carga puntual se pueden superponer linealmente por medio de la adición de vectores.

Este hecho se puede enunciar como el principio de superposición aplicado a los campos eléctricos. El campo total resultante en un punto, es la suma vectorial de los campos componentes individuales en dicho punto. Esto es; el campo en un punto debido a dos cargas puntuales será:

$$\mathbf{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} \hat{\mathbf{a}}_{R1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} \hat{\mathbf{a}}_{R2}$$

Si se suman mas cargas en otras posiciones, el campo debido a n cargas puntuales es

$$\mathbf{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} \hat{\mathbf{a}}_{R1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} \hat{\mathbf{a}}_{R2} + \dots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0 R_n^2} \hat{\mathbf{a}}_{Rn} \quad \text{ó}$$

$$\mathbf{E} = \sum_{m=1}^n \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_0 R_m^2} \hat{\mathbf{a}}_{Rm} \dots\dots\dots(2.1.11)$$

Campo debido a una distribución volumétrica continua de carga.

Imaginaremos una región del espacio llena con un gran número de cargas, separadas por distancias diminutas, dadas estas circunstancias podemos reemplazar esta distribución de partículas, por una distribución continua y uniforme, por medio de una *densidad volumétrica de carga*.

La densidad volumétrica de carga se denota mediante la letra griega ρ (rho) y, por supuesto, se mide en coulombs por metro cúbico (C/m³).

La pequeña cantidad de carga ΔQ, en un pequeño volumen Δv, es

$$\Delta Q = \rho \Delta v \dots\dots\dots(2.1.12)$$

Se puede definir el valor de la densidad volumétrica de carga ρ en un punto P como la carga ΔQ en un elemento de volumen pequeño Δv, dividida entre este volumen, tomando el limite de esta razón cuando el volumen tiende a cero alrededor del punto P, esto es

$$\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v} \dots\dots\dots(2.1.13)$$

De tal manera que la carga total dentro de algún volumen finito se obtiene integrando en todo ese volumen,

$$Q = \int_{vol} dQ = \int_{vol} \rho dv \dots\dots\dots(2.1.14)$$

La contribución a la intensidad del campo eléctrico producida por un incremento de carga ΔQ es

$$\Delta E = \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R = \frac{\rho\Delta v}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R \dots\dots(2.1.15)$$

Si se suman todas las contribuciones de toda la carga volumétrica, en una región dada,

$$\mathbf{E} = \sum_{m=1}^n \frac{\rho\Delta v}{4\pi\epsilon_0 R_m^2} \hat{\mathbf{a}}_{Rm} \dots\dots\dots(2.1.16)$$

Si se permite que el elemento de volumen Δv tiende a cero, conforme el número de estos elementos, n , se vuelve infinito, la suma se convierte en una integral,

$$\mathbf{E} = \int_{\text{vol}} \frac{\rho dv}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{\mathbf{a}}_R \dots\dots\dots(2.1.17)$$

Donde como antes el vector unitario $\hat{\mathbf{a}}_R$ esta en la dirección de R , que se extiende desde la posición del elemento ρdv hasta el punto en el cual se esta determinando la intensidad del campo eléctrico. En general, se debe esperar que ρ , $\hat{\mathbf{a}}_R$ y R sean funciones de la variables de integración, digamos x , y y z .

Campo de una carga lineal.

Consideremos que a una distribución volumétrica de carga le extraemos un filamento (tan delgado como se pueda imaginar), este pequeño filamento puede ser tratado como una carga lineal de densidad ρ_L C/m.

Supongamos que una carga rectilínea se extiende a lo largo del eje z en un sistema de coordenadas cilíndricas desde $-\infty$ hasta $+\infty$, como se muestra a continuación. Se desea la intensidad del campo eléctrico \mathbf{E} , en todos y cada uno de los puntos.

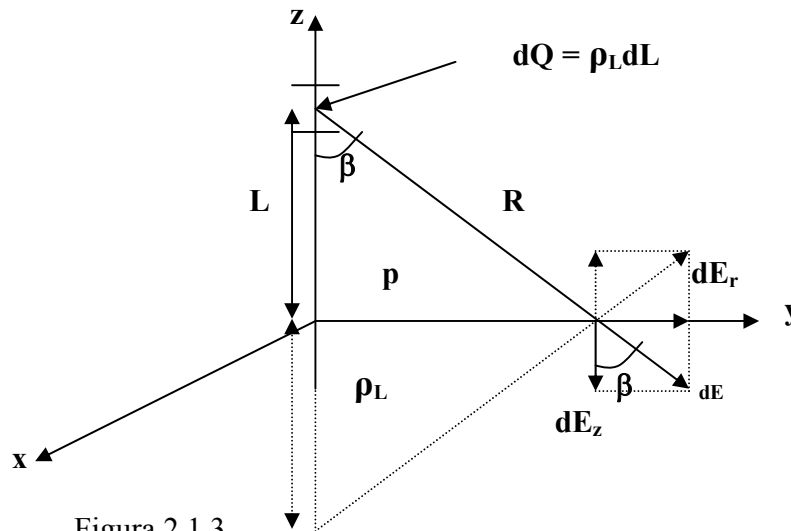


Figura 2.1.3

Consideremos la simetría del problema, con el objeto de determinar dos factores específicos:

- 1) ¿Con cuales coordenadas el campo no varia?
- 2) ¿Cuales componentes del campo no están presentes?

La respuesta a estas preguntas nos dice cuales componentes están presentes y con cuales coordenadas varían.

Al variar \varnothing manteniendo ρ y z constantes, la carga lineal aparece igual desde todo ángulo, esto implica que ninguna componente puede variar con \varnothing .

Si variamos z , manteniendo ρ y \varnothing constantes, la carga lineal aparece igual desde cualquier punto hacia arriba y hacia abajo. Esto implica que los campos no son función de z .

Si se varia ρ , manteniendo z y \varnothing constantes, la ley de coulomb nos conduce a esperar que el campo se debilita al aumentar ρ . Por lo tanto se concluye que *el campo varía únicamente con ρ .*
¿Qué componentes están presentes?

Ningún elemento de carga produce una componente \varnothing de la intensidad del campo eléctrico; E_{\varnothing} es cero. Sin embargo, cada elemento produce una componente en E_{ρ} y una en E_z , pero con la aportación de E_z por los elementos de carga situados a distancia iguales por encima y hacia abajo del punto en el que se esta determinando el campo, se cancelaran.

Por lo tanto se concluye que únicamente se tiene componente del campo E_{ρ} y varía únicamente con la coordenada ρ .

Seleccionemos un punto P, sobre el eje y, en el que se determinara el campo. Aplicando la ec.(2.1.17), solo que ahora $dQ = \rho_L dL$

$$dE = \frac{\rho_L dL}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{\mathbf{a}}_R \quad \text{ó bien:}$$

$$dE_\rho = \frac{\rho_L dL \sin\beta}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\rho_L dL \rho}{4\pi\epsilon_0 R^2 R} = \frac{\rho_L dL \rho}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad \text{pero } R^2 = L^2 + \rho^2$$

∴

$$E_\rho = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_L \rho dL}{4\pi\epsilon_0 (L^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

Aplicando : $\int \frac{du}{(u^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{u}{(2n-2)(a^2+u^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{du}{(a^2+u^2)^{n-1}} \right)$

se tiene

$$E_\rho = \frac{\rho_L \rho}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\rho^2} \frac{L}{\sqrt{L^2 + \rho^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \quad (\text{Dado que } L \gg \rho)$$

Olvidémonos de la simetría del problema. Elijamos un punto general P(ρ, Ø,z) como se muestra en la figura siguiente.

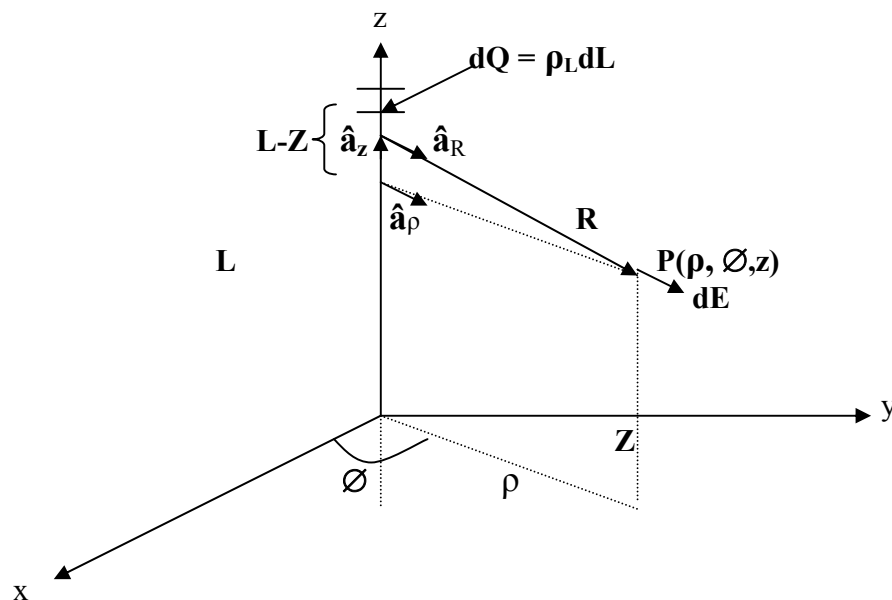


Figura 2.1.4

$$\mathbf{R} = \rho \hat{\mathbf{a}}_\rho - (L-Z) \hat{\mathbf{a}}_z ; \quad R = \sqrt{\rho^2 + (L-Z)^2} ; \quad \hat{\mathbf{a}}_R = \frac{\rho \hat{\mathbf{a}}_\rho - (L-Z) \hat{\mathbf{a}}_z}{\sqrt{\rho^2 + (L-Z)^2}}$$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_L dL [\rho \hat{\mathbf{a}}_r - (\mathbf{L}-\mathbf{Z}) \hat{\mathbf{a}}_z]}{4\pi\epsilon_0 [\rho^2 - (\mathbf{L}-\mathbf{Z})^2]^{3/2}}$$

$$E = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho dL \hat{\mathbf{a}}_r}{[\rho^2 - (\mathbf{L}-\mathbf{Z})^2]^{3/2}} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathbf{L}-\mathbf{Z}) dL \hat{\mathbf{a}}_z}{[\rho^2 - (\mathbf{L}-\mathbf{Z})^2]^{3/2}} \right)$$

Dado que los vectores unitarios $\hat{\mathbf{a}}_\rho$ y $\hat{\mathbf{a}}_z$ no varían con la variable de integración pueden salir de los signos de la integral.

$$E = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left(\hat{\mathbf{a}}_\rho \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho dL}{[\rho^2 - (\mathbf{L}-\mathbf{Z})^2]^{3/2}} - \hat{\mathbf{a}}_z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathbf{L}-\mathbf{Z}) dL}{[\rho^2 - (\mathbf{L}-\mathbf{Z})^2]^{3/2}} \right)$$

Aplicando : $\int \frac{u du}{(u^2+a^2)^{n/2}} = \frac{(u^2 \pm a^2)^{1-n/2}}{2-n}$

$$E = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left(\left[\hat{\mathbf{a}}_\rho \rho \frac{1}{\rho^2} \frac{\mathbf{L}-\mathbf{Z}}{\sqrt{\rho^2 - (\mathbf{L}-\mathbf{Z})^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \left[\hat{\mathbf{a}}_z \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - (\mathbf{L}-\mathbf{Z})^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} \right)$$

$$E = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} [\hat{\mathbf{a}}_\rho (2/\rho) + \hat{\mathbf{a}}_z (0)] = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \hat{\mathbf{a}}_\rho ; \quad E_r = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \rho$$

El campo cae inversamente con la distancia a la línea cargada.

Campo de una carga laminar.

Si se tiene un número infinito de filamentos (cargas lineales), esto constituye una lámina infinita de carga con densidad uniforme $\rho_S C/m^2$.

Coloquemos una lámina de carga en el plano yz y, de nuevo, consideremos la simetría. Puede notarse que el campo no varía ni con y ni con z , las componentes del campo en y y en z se cancelan en cualquier punto. Por lo tanto solo existe componente en E_x y es función de x únicamente.

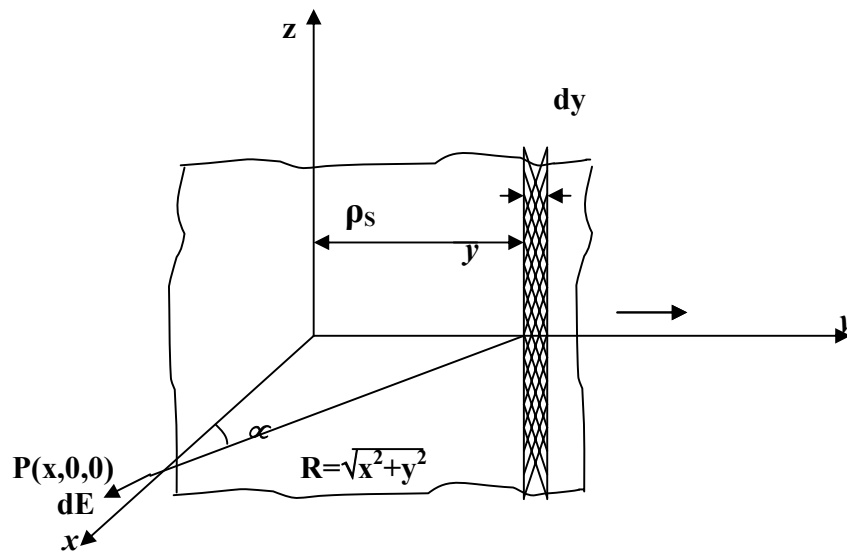


Figura 2.1.5

Dividiendo la lamina infinita en franjas de ancho diferencial, podemos considerar estas franjas como cargas lineales y aplicar la ecuación para una distribución lineal de carga. La densidad lineal de carga, es $\rho_L = \rho_S dy$. La aportación a E_x en $P(x,0,0)$ de esta cinta de ancho diferencial es entonces

$$dE_x = \frac{\rho_s dy}{2\pi \epsilon_0 R} \cos \alpha = \frac{\rho_s dy}{4\pi \epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\rho_s}{2\pi \epsilon_0} \frac{xdy}{x^2 + y^2}$$

Sumando los efectos de todas las franjas

$$E_x = \frac{\rho_s}{2\pi \epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdy}{x^2 + y^2} = \frac{\rho_s}{2\pi \epsilon_0} \left. \text{tg}(y/x) \right|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\rho_s}{2\pi \epsilon_0} [(1/2)\pi - (-1/2)\pi]$$

Aplicando : $\int \frac{dv}{a^2 + v^2} = (1/a) \text{tg}^{-1}(v/a)$

$$E_x = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

Si se eligiera el punto P, sobre el eje x negativo, entonces

$$E_x = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

Esto lo solucionamos agregando un vector unitario $\hat{\mathbf{a}}_n$, que sea normal a la lamina y dirigido hacia fuera de la misma. Entonces

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{a}}_n$$

Obsérvese que el campo no depende de la distancia de la lámina al punto.

Si una segunda lámina infinita de carga, con una densidad de carga $-\rho_s$, se localiza en el plano $x = a$, se puede encontrar el campo total sumando la aportación de cada lámina. En la región $x > a$,

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{a}}_x$$

$$\mathbf{E}_- = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{a}}_x$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \mathbf{0}$$

Y para $x < 0$

$$\mathbf{E}_+ = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{a}}_x$$

$$\mathbf{E}_- = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{a}}_x$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \mathbf{0}$$

Y cuando $0 < x < a$

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{a}}_x$$

$$\mathbf{E}_- = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{a}}_x$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \rho_s / \epsilon_0 \hat{\mathbf{a}}_x$$

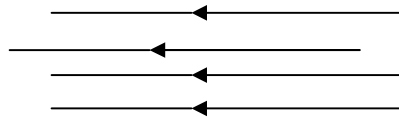
2.2 Ley de Gauss

Líneas de campo y esquemas de campo eléctrico

Una línea de campo eléctrico indica la dirección de la fuerza que se ejerce sobre una carga positiva de prueba introducida en el campo. Si se suelta la carga, se mueve en la dirección de la línea de campo.

En un campo uniforme, las líneas de campo son paralelas, como en la figura 2.2.1. Las líneas de campo no proporcionan información acerca de la intensidad del campo, sin embargo si nos dan información acerca de su dirección.

Fig 2.2.1 Líneas de campo eléctrico



Considérese ahora el caso de un campo no uniforme como el que existe en la vecindad de la carga puntual positiva Q en la figura 2.22. Si en este campo se suelta una carga de prueba positiva, esta se moverá radialmente alejándose de la carga Q , de modo que las líneas de campo son radiales. Como se recordara la intensidad del campo varía en forma inversa con el cuadrado de la distancia, en la figura 2.2.2 esta sugerida por el hecho de que las líneas de campo se separan al aumentar la distancia a Q .

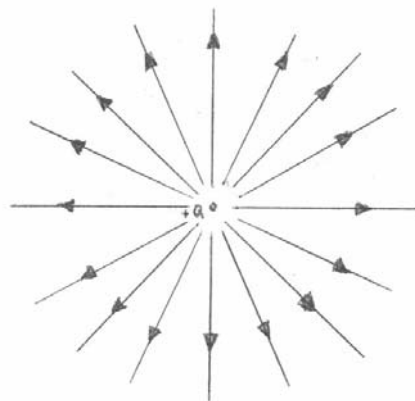
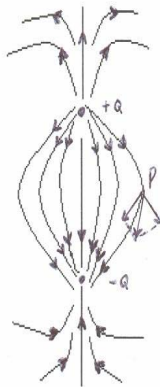


Figura 2.2.2
Líneas de campo de una carga puntual $+Q$

Líneas de campo de dos cargas iguales, del mismo signo y de signos opuestos.

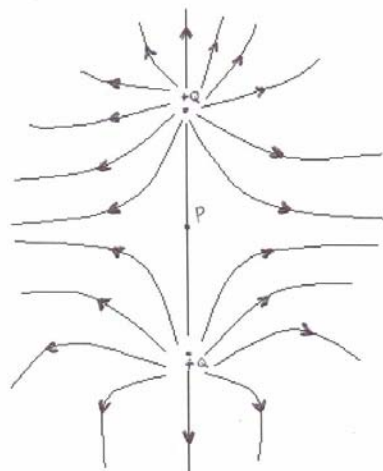
El campo en un punto P a causa de cargas puntuales $+Q$ y $-Q$ es igual a la suma vectorial de los campos en P debido a cada una de las cargas como puede verse en la figura 2.2.3.

Figura 2.2.3. Variación del campo eléctrico alrededor de un dipolo que consiste de una carga $+Q$ y otra $-Q$



En contraste con lo anterior se tiene el caso de dos cargas puntuales del mismo signo (+) como en el caso de la figura 2.2.4. Cerca de cada carga el efecto de la otra es pequeño. Obsérvese que el campo en el punto P es cero.

Figura 2.2.4 variación del campo eléctrico alrededor de Dos cargas iguales positivas.



Como puede notarse los esquemas anteriores fueron representando en dos dimensiones, ya que si se intentara hacer en tres dimensiones, la variación del campo hacia adentro y hacia fuera de la página, ocasionaría dificultades esencialmente insuperables (normalmente se hace $E_z = 0$)

En la figura 2.2.5 se muestran varias líneas de campo y, en un punto general se indican las componentes E_x y E_y . Dada la geometría resulta evidente que:

$$\frac{\bar{E}_y}{\bar{E}_x} = \frac{dy}{dx} \quad (2.2.1)$$

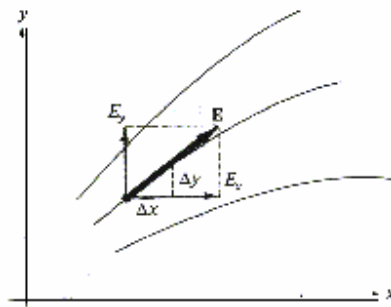


fig 2.2.5

Si se conoce la forma funcional de E_x y E_y (y se puede resolver la ecuación diferencial resultante) se podrán obtener las ecuaciones de las líneas de corriente.

A manera de ilustración del método, considérese el campo de la carga lineal uniforme con $\rho_L = 2\pi\epsilon_0\rho$ entonces:

$$\bar{E} = \frac{\rho L}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{a}_r = \frac{2\pi\epsilon_0}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{a}_r = \frac{1}{\rho} \hat{a}_r$$

En coordenadas cartesianas: $\bar{E} = \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{a}_x + \frac{y}{x^2 + y^2} \hat{a}_y$ y así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} = \frac{\frac{y}{x^2 + y^2}}{\frac{x}{x^2 + y^2}} = \frac{y}{x} \quad \text{ó bien} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Por lo tanto; integrando ambos lados de la ec. Anterior:

$$\ln y = \ln x + C_1 \implies \ln y = \ln x + \ln c = \ln cx \text{ de cual se obtiene } y = cx$$

Cada línea de corriente esta asociada a un valor específico c .

Flujo y densidad de flujo.

Ninguna partícula física es proyectada hacia fuera de una carga puntual de forma radial y no existen tentáculos que atraigan una carga de prueba, pero tan pronto como aparecen las líneas de campo parece que se tiene una imagen que muestra que " algo " esta presente.

Es de gran utilidad imaginar un flujo eléctrico que emana simétricamente de una carga puntual y que coincide con las líneas de campo, e imaginar este flujo siempre que esta presente un campo eléctrico.

Experimento de Faraday

Se tiene una esfera hueca que se conecta previamente a tierra para asegurarse de que no contenga carga, se retira la conexión a tierra y se introduce en el centro de la esfera hueca una carga +Q, posteriormente se retira la carga +Q y se observa que la esfera hueca ha adquirido una carga igual a -Q.

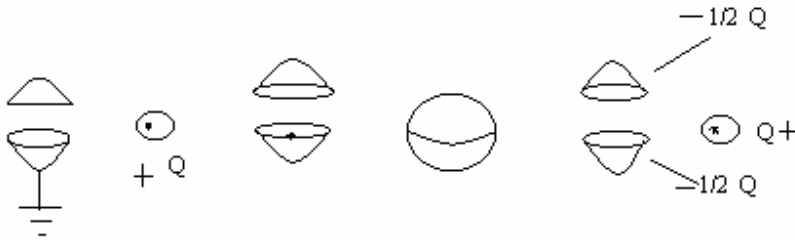
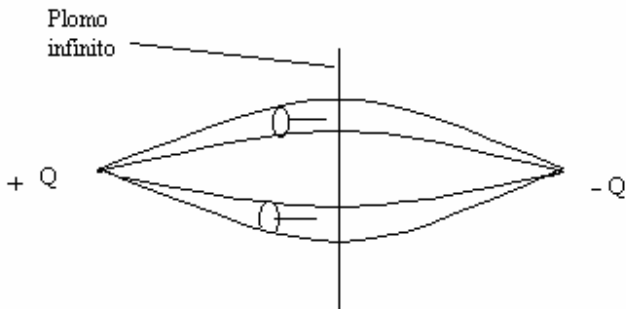


Figura 2.2.6

Algo paso de la esfera interior a la exterior a este algo se le Llamo flujo eléctrico (Ψ)

$$\Psi = Q \quad (\text{Coulombs})$$

Imaginemos las líneas de flujo como se muestra en la figura 2.2.7:



En cualquier punto existe una densidad de flujo D (proporcional a E) dada como Ψ/A en donde A es el area de la seccion transv. del tubo

Figura 2.2.7

Entonces $\Psi = DA$ ----- (2.2.2)

- D- Densidad de flujo promedio.
- A- Área de la sección transversal del tubo.

En forma general $\psi = \int_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_s D_n dS$ (2.2.3) D_n - Densidad de flujo Normal a la superficie.

Si se llena todo el espacio con tubos de flujo que conecten a $+Q$ y $-Q$ el flujo total en todos los tubos que pasan por el plano infinito que separa las cargas es igual a $+Q$. En forma semejante, al integrar \mathbf{D} en un plano infinito se obtiene Q , o bien

$$\psi = \int_{\text{plano infinito}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad (2.2.4)$$

Consideremos el campo eléctrico alrededor de una simple carga puntual positiva aislada Q como en la figura siguiente:

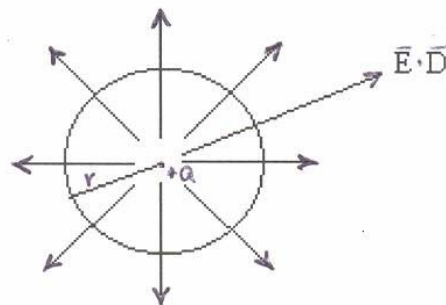


Figura 2.2.8

Dicho campo esta dado por $\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{a}}_r$ ó $\epsilon_0 \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{a}}_r$

La segunda ecuación tiene las unidades c/m^2 (carga/unidad de superficie) se deduce que:

$$\bar{\mathbf{D}} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{a}}_r \quad (2.2.5) \quad \text{ó bien} \quad \bar{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \bar{\mathbf{E}} \quad (2.2.6)$$

De acuerdo con esta última ecuación la densidad de flujo y la intensidad de campo eléctrico son vectores con la misma dirección y sentido.

Puesto que $4\pi r^2$ es igual al área de una esfera de radio r , se concluye que la magnitud de \mathbf{D} el radio r es idéntica a la densidad superficial de carga, que ocurriría si la carga Q estuviera distribuida uniformemente en una esfera de radio r , en lugar de concentrada en el centro.

Aunque la ec. (2.2.6) es aplicada a un vacío, no se restringe al campo de una carga puntual. Para una distribución volumétrica de carga, en el espacio libre,

$$\mathbf{E} = \int_{vol} \frac{\rho_v dv}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{\mathbf{a}}_R$$

Donde, esta ec. Fue desarrollada a partir del campo de una sola carga puntual. Según la ec. (2.2.6) tendremos

$$\bar{\mathbf{D}} = \int_{vol} \frac{\rho_v dv}{4\pi R^2} \hat{\mathbf{a}}_R \quad (2.2.7)$$

Ley de Gauss

El flujo eléctrico que pasa a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga total encerrada por esa superficie. (Puede ser imaginaria)

Resultado de los experimentos de Faraday

Entonces la contribución de Gauss no fue solamente enunciar la ley, sino en obtener una expresión matemática para este enunciado.

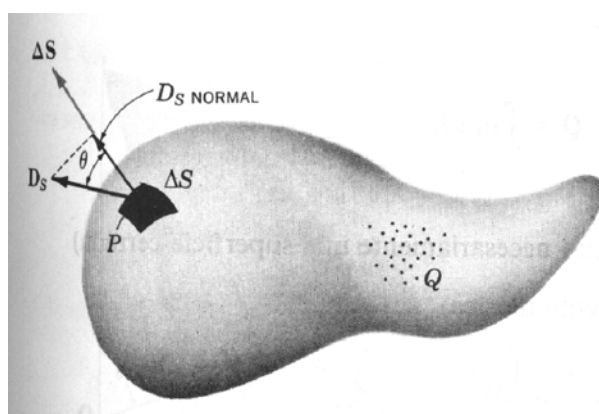


Figura 2.2.9

El flujo que cruza Δs , es el producto de la componente normal de \mathbf{D}_s y Δs ,

$$\Delta\psi \text{ Flujo que cruza} \quad \Delta\psi = \bar{D}_{s_{normal}} \Delta s = \bar{D}_s \cos \theta \Delta s = \bar{D}_s \cdot \Delta s$$

El flujo total que pasa a través de la superficie cerrada se obtiene sumando las contribuciones diferenciales que atraviesan cada elemento de superficie Δs ,

$$\psi = \oint d\psi = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{esta superficie recibe el nombre de superficie Gaussiana})$$

Se tiene entonces el enunciado matemático de la ley de Gauss,

$$\psi = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \text{carga encerrada} = Q$$

Donde la carga encerrada pueden ser varias cargas puntuales en cuyo caso $Q = \sum Q_n$

o una carga lineal $Q = \int \rho L dL$ ó una carga superficial $Q = \int_s \rho_s ds$ ó una distribución volumétrica $Q = \int_{vol} \rho dv$.

La ley de Gauss puede escribirse en términos de la distribución de carga como,

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{vol} \rho dv. \quad (2.2.8)$$

Considerando una carga puntual Q en el origen de un sistema de coordenadas esféricas y escogiendo una esfera de radio "a" como la superficie cerrada.

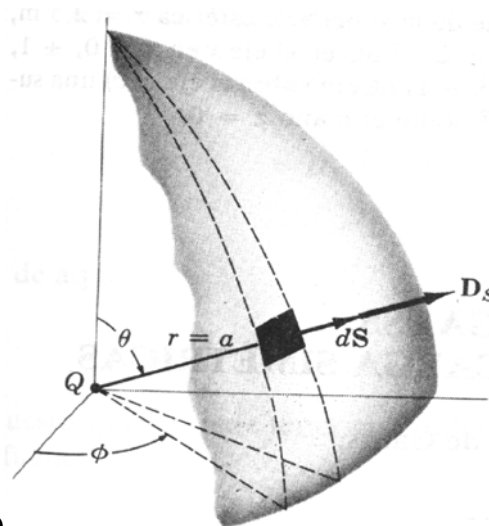


Fig 2.2.10

En la superficie de la esfera, $\bar{D}_s = \frac{Q}{4\pi a^2} \hat{a}_r$

$$ds = r^2 \text{sen}\theta d\phi d\theta = a^2 \text{sen}\theta d\phi d\theta \quad \text{o bien} \quad ds = a^2 \text{sen}\theta d\phi d\theta \hat{a}_r$$

e integrando $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Qa^2 \sin\theta d\theta d\phi}{4\pi a^2} (\hat{\mathbf{a}}_r \cdot \hat{\mathbf{a}}_r) = \frac{Q \sin\theta d\theta d\phi}{4\pi}$

$$\oint_S \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{Q \sin\theta d\theta d\phi}{4\pi} = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{Q \sin\theta d\theta}{2} = \frac{Q}{2} (-\cos\theta) \Big|_0^\pi = Q$$

Lo que demuestra que Q (coulombs) de flujo eléctrico atraviesa la superficie, como debe ser, ya que la carga encerrada es Q coulombs.

Aplicaciones de la ley de Gauss a distribuciones simétricas de carga.

$$Q = \oint_S \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S}$$

Para determinar \bar{D}_s si se conoce la distribución de carga, se requiere seleccionar una superficie cerrada que cumpla con las siguientes dos condiciones.

1.- \bar{D}_s en todas partes sea normal, o bien, tangencial a la superficie cerrada, de tal forma que $\mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S}$ se vuelva $D_s dS$ o cero, respectivamente.

2.- Sobre la porción de la superficie para la cual $\mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S}$ no sea cero, \bar{D}_s sea constante.

Un ejemplo de este tipo lo constituye una carga puntual en el origen de un sistema de coordenadas, tomando como superficie gaussiana una esfera de radio r . Para este caso se tiene que $\bar{D}_s = D_s \hat{\mathbf{a}}_r$ y $d\mathbf{S} = dS \hat{\mathbf{a}}_r$, por lo que de la ecuación de la ley de Gauss tenemos:

$$Q = \oint_{esf} D_s ds = D_s \oint_{esf} dS = D_s \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} r^2 \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi r^2 D_s$$

y entonces $D_s = \frac{Q}{4\pi r^2}$ Puesto que r puede tomar cualquier valor y como D_s

esta dirigido radialmente hacia afuera de la carga, entonces.

$$\bar{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{a}}_r \quad \text{y} \quad \bar{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{a}}_r$$

Donde la expresión para el campo concuerda con la ya obtenida a partir de la ley de Coulomb.

Otro ejemplo es el de la distribución lineal uniforme de cada carga que consideramos localizado a lo largo del eje z desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

A partir del análisis antes realizado, donde se concluyó que solamente la componente radial de \bar{D} esta presente.

$\mathbf{D} = D_\rho \hat{\mathbf{a}}_\rho$ y esta componente es solo función de ρ

La superficie Gaussiana seleccionada evidentemente es un cilindro de radio ρ con centro en el origen cerrado por medio de superficies planas normales al eje z , como se muestra en la figura 2.2.11 .

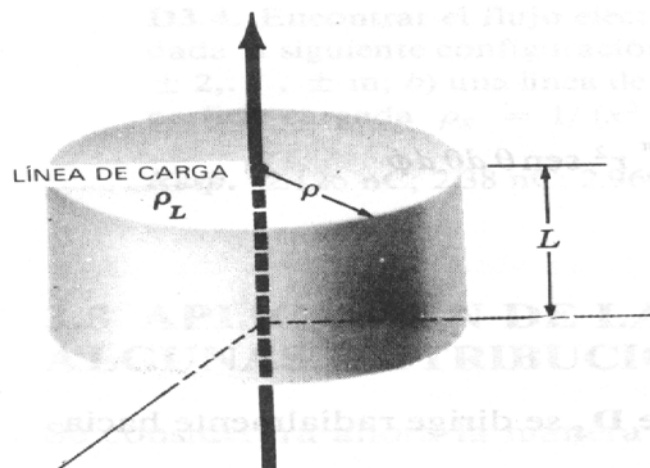


Figura 2.2.11

Aplicando la ley de Gauss a esta superficie

$$Q = \oint_{cil} \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} = D_s \int_{cara\ lat} dS + 0 \int_{tapa\ sup} dS + 0 \int_{tapa\ inf} dS$$

$$Q = D_s \int_{z=0}^{z=L} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \rho d\phi dz = D_s 2\pi\rho L \Rightarrow D_s = D_\rho = \frac{Q}{2\pi\rho L} \quad \text{Dado que } Q = \rho_L L$$

Lo cual da:

$$D_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} \quad \text{Y} \quad E_r = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}$$

Lo cual resulta más fácil que cuando determinamos el campo a partir de la ley de Coulomb, sin considerar la simetría del problema.

Como ejemplo consideremos dos conductores cilíndricos coaxiales, el interior de radio "a" y el exterior de radio "b", ambos de extensión infinita, como se muestra en la figura 2.2.12.

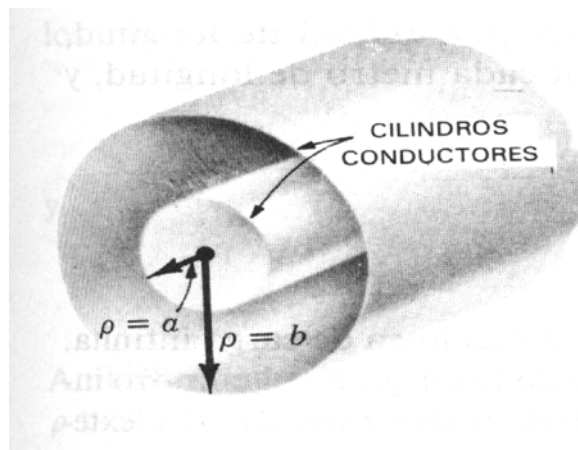


Figura 2.2.12

Se supondrá que, sobre la superficie exterior del conductor interior, se tiene una distribución de carga superficial de ρ_s .

Se elige un cilindro circular recto de longitud L y radio ρ , donde $a < \rho < b$, como la superficie gaussiana y entonces se tiene:

$$Q = D_s 2\pi \rho L$$

La carga total sobre la longitud L del conductor interior es:

$$Q = \int_{z=0}^{z=L} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \rho_s a d\phi dz = 2\pi a L \rho_s \quad \text{de donde se tiene que:}$$

$$D_s = \frac{a\rho_s}{\rho} \quad ; \quad \mathbf{D}_s = \frac{a\rho_s}{\rho} \hat{\mathbf{a}}_\rho \quad \text{para } a < \rho < b$$

Se puede expresar este resultado en términos de la carga por unidad de longitud debido a que el conductor interior tiene $2\pi a \rho_s$ coulombs por metro de longitud y por lo tanto, haciendo $\rho_L = 2\pi a \rho_s$.

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} \hat{\mathbf{a}}_\rho$$

Dado que cada línea de flujo eléctrico que emana de la carga del cilindro interior, debe terminar en una carga negativa sobre la superficie interior del cilindro exterior, la carga total sobre esa superficie debe ser:

$$Q_{\text{cil.ext.}} = -2\pi a L \rho_s (\text{cil.int.})$$

Se encuentra que la carga superficial sobre el cilindro exterior es:

$$2\pi bL\rho_{s,cil.ext} = -2\pi aL\rho_{s,cil.int}$$

$$\text{o} \quad \rho_{s,cil.ext} = -\frac{a}{b}\rho_{s,cil.int}$$

¿Que pasaría si se usara un cilindro de radio $\rho, \rho > b$, como la superficie gaussiana? La carga neta encerrada sería entonces igual a cero, porque hay cargas iguales y opuestas sobre cada cilindro conductor. De donde:

$$0 = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi\rho L \quad (\rho > b)$$

$$\text{y} \quad \therefore \mathbf{D} = 0$$

Aplicación de la ley de Gauss a un elemento diferencial de volumen.

El cubo es la superficie Gaussiana seleccionada.

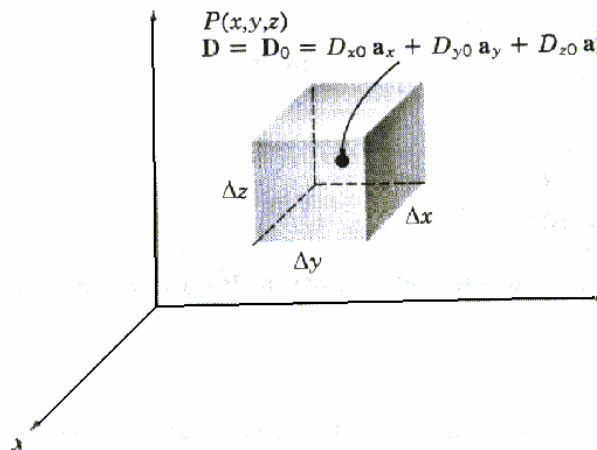


Figura 2.2.13

Este tipo de problemas es diferente a los analizados anteriormente, dado que no posee simetría alguna. Por esta razón no es posible elegir una superficie Gaussiana simple, tal que la componente normal de \mathbf{D} sea constante, o cero, en todo punto de la superficie. Para evitar estas dificultades se elige una superficie cerrada tan pequeña tal que \mathbf{D} sea casi constante sobre ella. El resultado se aproxima más conforme el volumen encerrado por la superficie Gaussiana disminuya y finalmente se haga tender este volumen a cero.

Aplicando la ley de Gauss tomando el pequeño cubo como superficie Gaussiana:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \Rightarrow \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{frente}} + \int_{\text{post.}} + \int_{\text{izq}} + \int_{\text{der}} + \int_{\text{sup}} + \int_{\text{inf}}$$

Consideremos la primera de estas integrales en detalle, ya que el elemento de superficie es muy pequeño.

\overline{D} es esencialmente constante:

$$\int_{\text{frente}} = \mathbf{D}_{\text{frente}} \cdot \Delta \mathbf{S}_{\text{frente}} = \mathbf{D}_{\text{frente}} \cdot \Delta_y \Delta_z \hat{\mathbf{a}}_x = D_{x,\text{frente}} \Delta_y \Delta_z$$

Donde solo se tiene que aproximar el valor de D_x en esta cara del frente. La cara del frente esta a una distancia de $\Delta x/2$, de P y por lo tanto:

$$D_{x,\text{frente}} = D_{x0} + (\Delta x/2)(\text{rapidez de cambio de } D_x \text{ con respecto a } x)$$

Y entonces:

$$D_{x,\text{frente}} = D_{x0} + (\Delta x/2) \frac{\partial D_x}{\partial x}$$

Donde D_{x0} es el valor de D_x en P , y donde debe utilizarse una derivada parcial para expresar la rapidez de cambio de D_x respecto a x , ya que D_x también varia, en general, con y y z y entonces se tiene:

$$\int_{\text{frente}} = (D_{x0} + (\Delta x/2) \frac{\partial D_x}{\partial x}) \Delta_y \Delta_z$$

Se considera ahora la integral sobre la cara posterior:

$$\int_{\text{post}} = \mathbf{D}_{\text{post}} \cdot \Delta \mathbf{S}_{\text{post}} = \mathbf{D}_{\text{post}} \cdot (-\Delta_y \Delta_z \hat{\mathbf{a}}_x) = -D_{x,\text{post}} \Delta_y \Delta_z$$

$$\text{y } D_{x,\text{trasera}} = D_{x0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \Rightarrow \int_{\text{post}} = (-D_{x0} + (\Delta x/2) \frac{\partial D_x}{\partial x}) \Delta_y \Delta_z$$

Sumando estas dos integrales

$$\int_{\text{frente}} + \int_{\text{post}} = \frac{\partial D_x}{\partial x} \Delta_x \Delta_y \Delta_z$$

Al aplicar exactamente el mismo proceso se encuentra que:

$$\int_{\text{izq}} + \int_{\text{der}} = \frac{\partial D_y}{\partial y} \Delta_x \Delta_y \Delta_z \quad \text{y} \quad \int_{\text{sup}} + \int_{\text{inf}} = \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta_x \Delta_y \Delta_z$$

y sumando estos tres resultados tenemos $\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta_x \Delta_y \Delta_z$

O bien $\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \approx \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta_v$

Lo anterior es una expresión que mejora a medida que Δ_v se hace más pequeño.

Conclusión:

[la carga encerrada en el volumen Δ_v] = $\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \times \text{volumen } \Delta_v$

Ejemplo: si $\vec{D} = e^{-x} \sin y \hat{a}_x - e^{-x} \cos y \hat{a}_y + 2z \hat{a}_z$ C/m² entonces:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = -e^{-x} \sin y \quad ; \quad \frac{\partial D_y}{\partial y} = e^{-x} \sin y \quad ; \quad \frac{\partial D_z}{\partial z} = 2$$

$$\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) = -e^{-x} \sin y + e^{-x} \sin y + 2 = 2$$

y entonces la carga encerrada en un volumen Δ_v será Q encerrada en $\Delta_v = 2 \Delta_v$ de tal suerte que si se tiene un volumen igual a 10^{-9} m^3 la carga encerrada será 2 nc.

Divergencia.

La ecuación $\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \approx \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta_v$ puede hacerse mas exacta

haciendo que el elemento de volumen Δ_v tienda a cero y así podemos escribir esta ecuación como:

$$\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \approx \frac{1}{\Delta v} \oint_s (\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}) = \frac{Q}{\Delta v} \quad \text{o, como un limite}$$

$$\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \approx \frac{1}{\Delta v} \oint_s (\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}) = \text{Lim}_{\Delta v \rightarrow 0} \left(\frac{Q}{\Delta v} \right) = \text{Lim}_{\Delta v \rightarrow 0} \left(\frac{Q}{\Delta v} \right)$$

En donde el ultimo termino de la ecuación anterior es ρ_v (densidad volumétrica de carga) y entonces

$$\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) = \text{Lim}_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \oint_s (\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S})$$

$$\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) = \rho_v$$

La primera de las dos ecuaciones anteriores es una operación que se le puede aplicar a cualquier campo vectorial (velocidad, gradiente de temperatura, fuerza, etc) y recibe el nombre de DIVERGENCIA. La divergencia de \mathbf{A} se define como:

$$\text{Divergencia de } \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A} = \text{Lim}_{\Delta v \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta v} \oint_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \right)$$

Describiendo las operaciones que intervienen en la ecuación anterior, donde se considera a \mathbf{A} como el vector densidad de flujo, se puede obtener la interpretación física de la divergencia.

La divergencia de la densidad de flujo vectorial \mathbf{D} es la cantidad de flujo que sale desde una superficie cerrada pequeña, por unidad de volumen a medida que el volumen se reduce a cero.

$$\text{La ecuación de la divergencia puede escribirse: } \text{div } \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

Esta última ecuación es el resultado de aplicar la definición de divergencia a un elemento diferencial de volumen en coordenadas cartesianas.

Si se hubiera seleccionado un elemento diferencial de volumen $\rho d\rho d\phi dz$, en coordenadas cilíndricas, ó $r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$, en coordenadas esféricas, se habrían obtenido expresiones para la

divergencia que comprenden a las componentes del vector en el sistema de coordenadas de que se trate, y que contiene además las derivadas parciales con respecto a las variables de ese sistema.

Las expresiones finales son:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad (\text{cartesianas})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad (\text{cilíndricas})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta D_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} \quad (\text{esféricas})$$

La divergencia es una operación que se efectúa sobre un vector, pero que el resultado es un escalar, y nos dice sencillamente "cuanto flujo" esta saliendo de un pequeño volumen sobre una base de por unidad de volumen, no existe dirección asociada con ella.

El operador vectorial ∇ (Nabla) y el teorema de la divergencia.

Dado que la divergencia es una operación sobre un vector que conduce a un resultado escalar, de la misma manera en que el producto punto de dos vectores da un resultado escalar, es posible hallar algo que se pueda multiplicar mediante el producto punto, formalmente con \mathbf{D} , para obtener el escalar:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

El proceso debe ser una operación punto.

Para esto se define el operador vectorial ∇

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{a}_z$$

∇ se tratara como un vector ordinario, con la excepción importante de que se tienen derivadas parciales, en lugar de productos de escalares. Consideremos:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{a}_z \right) \cdot (D_x \hat{a}_x + D_y \hat{a}_y + D_z \hat{a}_z)$$

Primero considérese los productos puntos de los vectores unitarios, descartando los seis términos que son cero. Así se tiene:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x} (D_x) + \frac{\partial}{\partial y} (D_y) + \frac{\partial}{\partial z} (D_z) \right)$$

Donde los paréntesis pueden suprimirse para operar o diferenciar:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right)$$

Y esto se conoce como la divergencia de \mathbf{D} así que se tiene:

$$\text{div} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right)$$

Escribir $\nabla \cdot \mathbf{D}$ permite obtener sencilla y rápidamente, las derivadas parciales correctas, pero solo en coordenadas cartesianas, dado que el operador ∇ no tiene una forma específica en otros sistemas de coordenadas.

Sin embargo en coordenadas cilíndricas o esféricas, $\nabla \cdot \mathbf{D}$ todavía indica la divergencia, esto es:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad (\text{cil})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta D_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} \quad (\text{esf})$$

El teorema de la divergencia de hecho ya lo obtuvimos, ahora no hay más que señalarlo.

Partamos de la ley de Gauss:

$$Q = \oint_s \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S}$$

y considerando la carga como un volumen $Q = \int_{\text{vol}} \rho_v dv$; Tendremos:

$\oint_S \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} = Q = \int_{vol} \rho_v dv$; Pero además se sabe que $\rho_v = \text{div} \mathbf{D}$ y $\text{div} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D}$, por lo tanto:

$$\oint_S \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} = Q = \int_{vol} \rho_v dv = \int_{vol} \nabla \cdot \mathbf{D} dv$$

$$\oint_S \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} = \int_{vol} \nabla \cdot \mathbf{D} dv \quad \text{Esta expresión constituye el teorema de la divergencia}$$

Que se puede enunciar:

La integral de la componente normal de cualquier campo vectorial sobre una superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia de este campo vectorial en todo el volumen encerrado por la superficie cerrada.

2.3 Potencial eléctrico

Para encontrar el campo eléctrico se ha hecho uso primeramente de la ley de Coulomb y posteriormente para distribución simétricas de carga de la ley de Gauss.

En esta unidad se encontrará un escalar, por medio de una sola integración y a partir de este escalar se determina el campo eléctrico por medio de la derivación. A esta función escalar se le conoce como potencial eléctrico, o campo de potencial eléctrico y tiene una interpretación física muy real y es más conocido incluso que el campo eléctrico.

Energía consumida en mover una carga puntual, en un campo eléctrico.

Si se desea mover una carga Q una distancia $d\mathbf{L}$, en un campo eléctrico \mathbf{E} . La fuerza sobre Q , debida al campo eléctrico es:

$$\mathbf{F}_E = Q\mathbf{E} \quad (2.3.1)$$

La componente de esta fuerza en la dirección $d\mathbf{L}$, que debe vencerse es:

$$F_{EL} = \vec{F}_E \cdot \hat{\mathbf{a}}_L = Q\vec{E} \cdot \hat{\mathbf{a}}_L \quad \hat{\mathbf{a}}_L \Rightarrow \text{Versor en la dirección de } d\vec{L}$$

La fuerza que se debe aplicar es igual y opuesta a la fuerza del campo

$$\mathbf{F}_{apl} = -Q\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{a}}_L \quad (2.3.2)$$

Y el gasto de energía es el producto de la fuerza y la distancia,

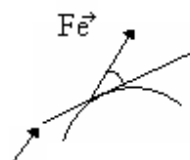
$$\left(\begin{array}{l} \text{Trabajo diferencial} \\ \text{efectuado por la fuente} \\ \text{externa que mueve a } Q \end{array} \right) = (-Q\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{a}}_L) dL = -Q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad \text{o bien} \quad dW = -Q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (2.3.3)$$

$$dW = 0 \quad \text{para} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Cond. Triviales} \quad \vec{E} \cdot d\vec{L} = 0 \\ \text{Y en el caso en que } \vec{E} \text{ y } d\vec{L} \text{ son} \\ \text{perpendiculares} \end{array} \right)$$

El trabajo que se requiere para mover la carga una distancia finita debe determinarse integrando

$$W = -Q \int_{\text{inic.}}^{\text{final}} \vec{E} \cdot d\vec{L} \quad (2.3.4)$$

Donde se debe especificar la trayectoria antes de que se evalué la integral.



Fapl desplazamiento
Figura 2.3.1

La integral de la ecuación anterior es llamada integral de línea, donde el producto punto del campo vectorial \mathbf{E} y la longitud diferencial $d\mathbf{L}$ de una trayectoria vectorial se puede escribir.

$$W = -Q \int_{inic.}^{fin.} E_L dL \quad (2.3.5)$$

Donde $E_L =$ componente de \mathbf{E} a lo largo de $d\mathbf{L}$

Trabajo para llevar una carga Q desde un punto inicial B hasta un punto final A a través de la trayectoria mostrada que se dividió en segmentos ΔL .

Se ha supuesto un campo \mathbf{E} uniforme

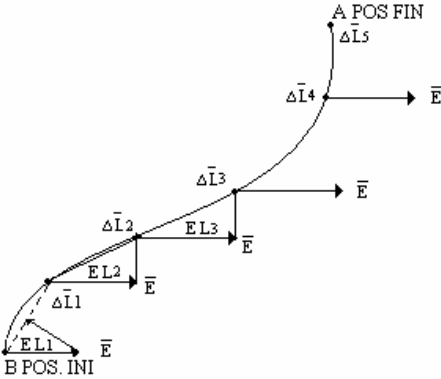


Figura 2.3.2

$$W = -Q(E_{L1}\Delta_{L1} + E_{L2}\Delta_{L2} + \dots + E_{L5}\Delta_{L5}) \quad (2.3.6)$$

ó $W = -Q(\mathbf{E}_1 \cdot \Delta\mathbf{L}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \Delta\mathbf{L}_2 + \dots + \mathbf{E}_5 \cdot \Delta\mathbf{L}_5)$ como \mathbf{E} es uniforme $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \dots$ y entonces $W = -Q \mathbf{E} \cdot (\Delta\mathbf{L}_1 + \Delta\mathbf{L}_2 + \dots + \Delta\mathbf{L}_5)$ sumando estos vectores por la ley del paralelogramo. $\Delta\mathbf{L}_1 + \Delta\mathbf{L}_2 + \dots + \Delta\mathbf{L}_5 = \mathbf{L}_{BA}$

si el número de segmentos tiende a infinito y su longitud tiende a cero

$$W = -Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{L}_{BA} \quad (2.3.7) \quad \Longrightarrow \quad W = -Q \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

$$W = -Q \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (2.3.8)$$

y aplicado a un campo uniforme $W = -QE \cdot \int_B^A d\mathbf{L} = -QE(L_{BA})$

Las expresiones para $d\mathbf{L}$ en los tres sistemas de coordenadas utilizan las longitudes diferenciales que se obtuvieron en la primera unidad:

$$d\mathbf{L} = dx\hat{\mathbf{a}}_x + dy\hat{\mathbf{a}}_y + dz\hat{\mathbf{a}}_z \quad (\text{Cart.})$$

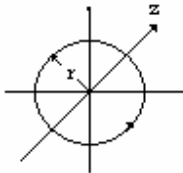
$$d\mathbf{L} = d\rho\hat{\mathbf{a}}_\rho + \rho d\Phi\hat{\mathbf{a}}_\phi + dz\hat{\mathbf{a}}_z \quad (\text{Cil})$$

$$d\mathbf{L} = dr\hat{\mathbf{a}}_r + rd\theta\hat{\mathbf{a}}_\theta + r\text{sen}\theta d\phi\hat{\mathbf{a}}_\phi \quad (\text{esf.})$$

Como ejemplo tomemos varias trayectorias en las cercanías de una línea de carga, como sabemos el campo debido a una línea de carga esta dado por:

$$\mathbf{E} = E_\rho\hat{\mathbf{a}}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\hat{\mathbf{a}}_\rho$$

encontremos primero el trabajo realizado al llevar carga positiva Q , alrededor de una trayectoria circular de radio ρ_1 con centro de carga lineal, como se ilustra en la figura (2.3.3)



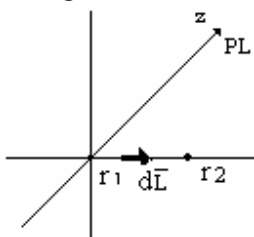
Al elegir el elemento diferencial en coordenadas cilíndricas, podemos observar que $dr = dz = 0$, así que $d\mathbf{L}$ estará dado por:

$$d\mathbf{L} = \rho_1 d\phi\hat{\mathbf{a}}_\phi$$

Figura 2.3.3

y entonces
$$W = -Q \int_{inic}^{fin} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho_1} \hat{\mathbf{a}}_\rho \cdot \rho_1 d\phi\hat{\mathbf{a}}_\phi = -Q \int_0^{2\pi} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} d\phi\hat{\mathbf{a}}_\rho \cdot \hat{\mathbf{a}}_\phi = 0$$

si llevamos ahora la carga desde ρ_1 hasta ρ_2 a lo largo de una trayectoria radial como se muestra en la figura 2.3.4:



y entonces
$$W = \int_{inic}^{fin} \frac{\rho_L}{2\rho\epsilon_0\rho} \hat{\mathbf{a}}_\rho \cdot d\rho\hat{\mathbf{a}}_\rho = -Q \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{d\rho}{\rho}$$

Figura 2.3.4 así tendremos:
$$W = -\frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

$$d\mathbf{L} = d\rho\hat{\mathbf{a}}_\rho$$

Dado que $\rho_2 > \rho_1$, $\ln(\rho_2/\rho_1)$ es positivo, entonces el trabajo realizado es negativo, lo que indica que la fuente externa que mueve la carga recibe energía.

Supóngase ahora que se lleva a Q desde ρ_2 hasta ρ_1 . Aun se tiene que $d\mathbf{L} = d\rho \hat{\mathbf{a}}_\rho$, solamente que ahora tendremos

$$W = -Q \int \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Este es el negativo de la respuesta anterior, esto implica que la fuente externa que mueve a la carga entrega energía.

2.4 Diferencia de potencial y potencial.

A partir del trabajo para llevar una carga de un punto a otro, ecuación (2.3.4)

$$W = -Q \int_{inicial}^{final} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

Se define la diferencia de potencial como trabajo efectuado (por una fuente externa) al mover una carga positiva “unitaria” de un punto a otro, en un campo eléctrico.

$$\text{Diferencia de Potencial} = -Q \int_{inicial}^{final} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (2.4.1)$$

Utilizaremos la letra “V” para designar diferencia de potencial, pero, dada la definición de diferencia de potencial debemos indicar el punto inicial y el punto final, y esto lo haremos usando subíndices, así tendremos que V_{AB} es la diferencia de potencial entre los puntos A y B y que es el trabajo efectuado al mover la carga de un punto inicial B hasta un punto final A.

La diferencia de potencial se mide en Julios por columbio y se define como voltio (v) entonces tendremos que la diferencia de potencial entre los puntos A y B es.

$$V_{AB} = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad \text{v} \quad (2.4.2)$$

En el ejemplo anterior de la carga lineal, se encontró que el trabajo efectuado en llevar la carga desde ρ_2 hasta ρ_1 fue:

$$W = \frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Entonces la diferencia de potencial entre los puntos ρ_1 y ρ_2 es:

$$V_{12} = \frac{W}{Q} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (2.4.3)$$

Encontremos la diferencia de potencial entre los puntos A y B con distancias radiales ρ_A y ρ_B a una carga puntual Q . Eligiendo un sistema de coordenadas esféricas con centro en Q .

$$\mathbf{E} = E_r \hat{\mathbf{a}}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{a}}_r \quad \text{y} \quad d\vec{L} = dr \hat{\mathbf{a}}_r$$

$$V_{AB} = -\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\vec{L} = -\int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad (2.4.4)$$

V_{AB} puede ser positivo o negativo dependiendo de si $r_B > r_A$ ó $r_A > r_B$

A menudo resulta conveniente hablar de potencial o de potencial absoluto de un punto, en un lugar de diferencia de potencial esto implica que se conviene en medir toda diferencia del potencial con respecto a un punto de referencia especificada, el cual se considera que tiene un potencial cero.

Los puntos de referencia mas comúnmente seleccionados son, la tierra y el infinito, usar uno u otro depende del problema específico que se desee atacar, esto no implica que no pueda seleccionarse cualquier otro tipo.

Independientemente de la referencia seleccionada, si el potencial en el punto A es V_A y en B V_B entonces:

$$V_{AB} = V_A - V_B$$

Donde necesariamente V_A y V_B deberán tener el mismo punto de referencia cero.

2.5 Campo de potencial de una carga puntual.

La diferencia de potencial entre dos puntos localizados en $r = r_A$ y $r = r_B$, en el campo de una carga puntual Q colocada en el origen de un sistema de coordenadas esta dada por:

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = V_A - V_B$$

Se supuso que los dos puntos se encontraban sobre la misma recta radial, esto es, tenían las mismas coordenadas Φ y θ lo que permitió establecer una trayectoria simple sobre una línea radial, a lo largo de la cual llevar la carga positiva.

Si elegimos una trayectoria mas complicada entre los puntos A y B el resultado no se altera. Sean los puntos A y B con distancias radiales r_A y r_B respectivamente y cualesquiera otros valores para las coordenadas Φ y θ , como se muestra en la figura 2.5.1.

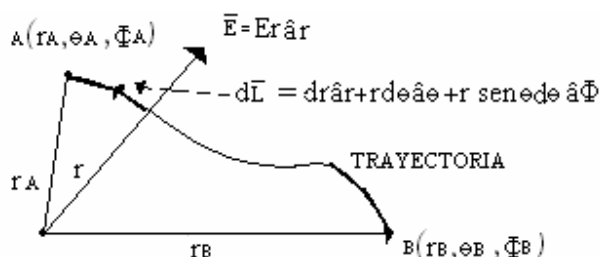


Figura 2.5.1

Entonces la diferencia de potencial nos queda

$$V_{AB} = \int_{r_B}^{r_A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_{r_B}^{r_A} (E_r \hat{\mathbf{a}}_r) (dr \hat{\mathbf{a}}_r + r d\theta \hat{\mathbf{a}}_\theta + r \sin\theta d\phi \hat{\mathbf{a}}_\phi) = \int_{r_B}^{r_A} E_r dr \quad (2.5.1)$$

El campo debido a una carga puntual es: $\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{a}}_r$ y $E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$\text{Entonces: } V_{AB} = -\int_{r_B}^{r_A} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad (2.5.2)$$

Se obtiene la misma respuesta lo cual implica que la diferencia de potencial entre los puntos depende únicamente de la distancia entre dichos puntos y no de la trayectoria usada para llevar la carga unitaria de un punto al otro.

Para determinar el potencial absoluto en un punto resulta mas simple si seleccionamos como referencia cero el infinito. Si se hace que el punto $r = r_B$ retroceda hacia el infinito, el potencial de r_A queda:

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A} \quad (2.5.3)$$

Y entonces el potencial en un punto cualquiera debido a una carga puntual Q será:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.5.4) \quad \text{Donde } r \text{ es la distancia de la carga al punto.}$$

Esto es tomando la referencia cero en el infinito.

La interpretación física de esta expresión es la siguiente:

Se debe efectuar $Q/4\pi\epsilon_0 r$ J de trabajo para llevar una carga de 1C desde el infinito hasta cualquier punto a r metros de la carga Q .

Esta última ecuación representa el campo de potencial de una carga puntual. Note que el campo de potencial es un campo escalar y por lo tanto no incluye vector unitario alguno.

Superficie equipotencial.

Es una superficie compuesta de todos aquellos puntos que tienen el mismo valor de potencial. De aquí se concluye que no se necesita realizar trabajo para mover una carga unitaria sobre una superficie equipotencial, ya que la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera de esta superficie es cero.

Las superficies equipotenciales en el campo de potencial de una carga puntual, son esferas con centro en la carga puntual.

2.6 Campo de potencial de un sistema de cargas (propiedad conservativa).

Se ha definido el potencial en un punto como el trabajo que se requiere para llevar una carga positiva unitaria desde la referencia cero hasta dicho punto y se ha comprobado que este trabajo y, por lo tanto el potencial, es independiente de la trayectoria seguida.

El campo de potencial en un punto debido a una sola carga puntual cuya independencia con respecto a la trayectoria ya se ha demostrado, se puede observar que dicho campo es lineal respecto a la carga de tal forma que es aplicable el principio de superposición y entonces se concluye que el potencial de un sistema de cargas tiene un valor, en cualquier punto, que es independiente de la trayectoria que se tome para llevar una carga de prueba a ese punto.

El campo potencial en un punto debido a una carga puntual (que llamaremos Q_1) con referencia cero en el infinito esta dado por:

$$V = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \quad (2.6.1)$$

Donde R_1 es la distancia medida desde Q_1 al punto en el cual se esta estableciendo el valor del potencial.

El potencial debido a dos cargas Q_1 y Q_2 , es una función solo de R_1 y R_2 , las distancias de Q_1 y Q_2 al punto donde se calcula el campo de potencial, respectivamente:

$$V = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad (2.6.2)$$

En general el potencial debido a "n" cargas puntuales será:

$$V = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \dots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0 R_n} = \sum_{m=1}^{m=n} \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_0 R_m} \quad (2.6.3)$$

Si ahora representamos cada carga puntual como un elemento pequeño de una distribución volumétrica continua de carga $\rho_v \Delta v$, entonces:

$$V = \frac{\rho_1 \Delta v_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{\rho_2 \Delta v_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \dots + \frac{\rho_n \Delta v_n}{4\pi\epsilon_0 R_n} \quad (2.6.4)$$

A medida que el número de elementos se hace infinito y su volumen tiende a cero, se obtiene la expresión integral:

$$V = \int_{vol} \frac{\rho dv}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (2.6.5)$$

No debemos perder de vista en la ecuación anterior que el potencial V se determinó con respecto a un potencial de referencia cero, en el infinito, y es una medida exacta del trabajo efectuado para traer una carga unitaria desde el infinito hasta un punto, digamos A, en el que se esta encontrando el potencial. ρ y dv se combinan para representar una cantidad diferencial de carga ρdv ,

localizada en un punto en general diferente de A . R es la distancia desde el elemento de carga ρdv hasta el punto en que se va a determinar el potencial A .

Si la distribución de carga toma la forma de una línea o de una superficie de carga, la integración es a lo largo de una línea o de una superficie respectivamente, esto es:

$$V = \int \frac{\rho_L dL}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (2.6.6) \quad \text{y} \quad V = \int_s \frac{\rho_s ds}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (2.6.7)$$

Puede notarse que el campo de potencial es una ley de la distancia inversa mientras que el campo eléctrico es una ley del cuadrado inverso de la distancia y además el primero es un campo escalar mientras que el segundo es un campo vectorial.

En resumen:

- 1.- el potencial debido a una sola carga puntual es el trabajo realizado para traer una carga positiva unitaria desde el infinito hasta el punto en el que se desea el potencial, y el trabajo es independiente de la trayectoria seguida entre esos dos puntos.
- 2.- El campo de potencia en presencia de cierto número de cargas puntuales es la suma de los campos de potencial individuales que provienen de cada carga.
- 3.- Por lo tanto, se puede encontrar el potencial debido a cierto número de cargas puntuales ó a cualquier distribución continua de carga, llevando una carga unitaria, desde el infinito hasta el punto en cuestión, a lo largo de cualquier trayectoria que se elija.

En otras palabras, la expresión para el potencial (referencia cero en el infinito)

$$V_A = -\int_{\infty}^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad \text{ó la diferencia de potencial} \quad V_{AB} = V_A - V_B = -\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

no depende de la trayectoria que se escoja para la integral de línea, sin importar la fuente del campo \mathbf{E} .

Lo anterior implica que no se efectúa trabajo para llevar una carga unitaria alrededor de una trayectoria cerrada, esto es:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \quad (2.6.8)$$

La ecuación anterior es valida para campos estáticos, posteriormente se vera que es incompleta cuando existen campos magnéticos que varían con el tiempo.

Restringiendo nuestra atención al caso estático, donde \mathbf{E} no cambia con el tiempo, la ecuación (2.6.8) es una forma más general de la ley de los voltajes de Kirchhoff.

Se dice que cualquier campo en el que la integral cerrada de línea del campo es cero, es un campo conservativo. El nombre proviene del hecho de que no se efectúa trabajo alguno (o que se conserva la energía) alrededor de una trayectoria cerrada.

2.7 Gradiente de potencial.

Cuando los campos varían en el tiempo, podemos describir la variación tomando sus derivados respecto a “t”. Podemos describir la variación respecto a la posición en forma similar.

Digamos que nos interesa conocer la relación entre la temperatura en un punto y en un punto vecino ¿Como hacemos para hallar las derivadas de la temperatura respecto a la posición?

Dado que la temperatura varía en general con x, y y z entonces la derivada de T respecto a la posición tiene tres derivadas posibles $\frac{\partial T}{\partial X}, \frac{\partial T}{\partial Y}$ y $\frac{\partial T}{\partial Z}$.

Consideramos dos puntos P1 y P2 separados por un pequeño intervalo ΔR. La temperatura en P1 es T1 y en P2 es T2 y la diferencia es ΔT = T2 - T1. Las temperaturas en estos puntos físicos reales, no depende de los ejes que tenemos para medir las coordenadas. En particular ΔT es un número independiente del sistema de coordenadas (es un escalar).

En un sistema de coordenadas cartesianas podemos escribir T1 = T(x, y, z) y T2 = T(x + Δx, y + Δy, z + Δz) donde Δx, Δy y Δz son los componentes del vector ΔR.

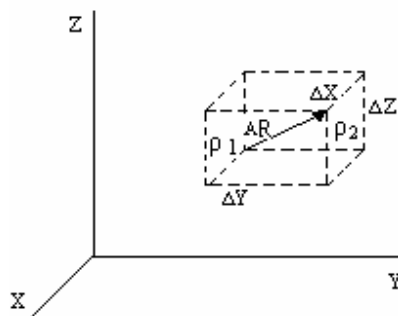


Figura 2.7.1

Podemos escribir:

$$\Delta T(x, y, z) = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \Delta z \quad (2.7.1)$$

El primer miembro de la ecuación (2.7.1) es un escalar, el segundo es la suma de tres productos con Δx, Δy y Δz que son los componentes de un vector (el vector ΔR) por consiguiente los tres números

$$\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$$

Son entonces los componentes x, y, z de un vector, este nuevo vector lo podemos escribir como el operador ∇ (ya conocido) sobre el escalar T, esto es:

∇T ⇒ se lee (nabla T ó gradiente de T) grad T

$$\text{Entonces } \text{grad } T = \nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \hat{\mathbf{a}}_x + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{\mathbf{a}}_y + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{\mathbf{a}}_z \quad (2.7.2)$$

Y ♣ la ec (2.7.1) $\Delta T = \nabla T \cdot \Delta \mathbf{R}$

Que indica que la diferencia de temperaturas entre dos puntos vecinos es el producto escalar (producto punto) del gradiente de T por el vector desplazamiento.

Se puede obtener fácilmente \mathbf{E} a partir de V (es tan fácil como derivar)

Consideremos un punto $B(x, y, z)$ y otro $A(x + dx, y, z)$, la diferencia de potencial entre un punto y otro es (el camino es a lo largo de la línea horizontal entre x y $x + dx$).

$$V_{AB} = V_A(x + \Delta x, y, z) - V_B(x, y, z) = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \quad (2.7.3)$$

Pero el trabajo realizado contra las fuerzas del campo para llevar una carga unitaria desde B hasta A (diferencia de potencial) en función del campo es:

$$V_{AB} = -\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -E_x \Delta x \quad (2.7.4)$$

Luego igualado (2.7.3) y (2.7.4)

$$E_x = -\frac{\partial v}{\partial x} \text{ de manera análoga } E_y = -\frac{\partial v}{\partial y} \text{ y } E_z = -\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\text{Entonces } \mathbf{E} = -\nabla V = -\text{grad } V \quad \text{ó bien } \mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{\mathbf{a}}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\mathbf{a}}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mathbf{a}}_z \right) \quad (2.7.5)$$

El gradiente se puede expresar en términos de derivadas parciales en otros sistemas de coordenadas. Se usarán en problemas que tengan simetría esférica o cilíndrica y son:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \hat{\mathbf{a}}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\mathbf{a}}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mathbf{a}}_z \quad (2.7.6) \quad (\text{Cilíndricas})$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{a}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\mathbf{a}}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\mathbf{a}}_\phi \quad (2.7.7) \quad (\text{Esféricas})$$

Gradiente de potencial (Otro enfoque)

En esta sección se analizará la manera de determinar el campo eléctrico a partir del potencial, ya que hasta ahora se ha utilizado el procedimiento inverso, calcular el potencial a partir del campo, utilizando como punto de partida la ecuación.

$$V_{AB} = -\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

Apliquemos la ecuación anterior a un pequeño elemento de longitud $\Delta \mathbf{L}$ a lo largo del cual \mathbf{E} es básicamente constante, esto produce un incremento ΔV en la diferencia de potencial dado por:

$$\Delta V \approx -\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{L} \quad (2.7.8)$$

Consideramos una región del espacio, como la que se muestra en la figura (2.7.2), en la cual tanto \mathbf{E} como V cambian continuamente de un punto a otro. La ecuación anterior sugiere que se escoja un incremento vectorial de longitud $\Delta \mathbf{L} = \Delta L \hat{\mathbf{a}}_L$ para multiplicar su magnitud por la componente de \mathbf{E} en la dirección de $\Delta \mathbf{L}$ y así obtener la pequeña diferencia de potencial entre los puntos de los extremos final e inicial de $\Delta \mathbf{L}$.

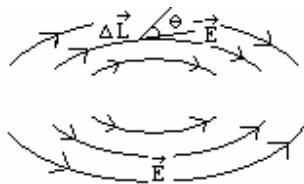


Figura 2.7.2

Entonces:

$$\Delta V \approx -E \Delta L \cos \theta \qquad \frac{\Delta V}{\Delta L} \approx -E \cos \theta$$

La anterior aproximación se convierte en una igualdad en el límite cuando $\Delta L \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta L} = -E \cos \theta \Rightarrow \frac{dV}{dL} = -E \cos \theta \quad (2.7.9)$$

Obsérvese que para que $\frac{dV}{dL}$ tenga un valor máximo, se requiere que $\cos \theta = -1$, esto ocurre cuando $\theta = 180^\circ$ y por lo tanto $\Delta \mathbf{L}$ debe apuntar en la dirección opuesta al campo \mathbf{E} . Con esta condición se tiene que

$$\left[\frac{dV}{dL} \right]_{MAX} = |\mathbf{E}| \quad (2.7.10)$$

De lo anterior concluimos que:

- 1.- La magnitud de la intensidad del campo eléctrico esta dada por el máximo valor de la razón de cambio del potencial con respecto a la distancia.
- 2.- Este valor máximo se obtiene cuando la dirección del incremento de distancia es opuesta a \mathbf{E} o dicho en otras palabras, la dirección de \mathbf{E} es opuesta a la dirección en la cual el potencial aumenta más rápidamente.

En la figura (2.7.3) se muestra la información obtenida en relación con algún campo de potencial. Dicha información la muestran las superficies equipotenciales.

Se desea determinar la intensidad del campo eléctrico en el punto P. De acuerdo con la figura (2.7.3) la dirección en que el potencial aumenta con mayor rapidez es de izquierda a derecha y ligeramente hacia arriba, por lo que la dirección del campo (que es opuesta) será hacia la derecha y ligeramente hacia abajo en P.

La magnitud se obtiene dividiendo el tamaño del incremento del potencial entre el pequeño elemento de longitud.

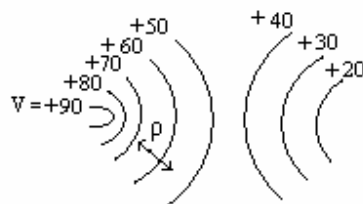


Figura 2.7.3

La dirección en la que el potencial se incrementa más rápidamente es aquella perpendicular a las equipotenciales en el sentido en el que el potencial aumenta.

Llamemos $\hat{\mathbf{a}}_N$ al vector unitario normal a las superficies equipotenciales y dirigido hacia los valores más altos del potencial. De esta manera la intensidad del campo eléctrico puede expresarse como:

$$\mathbf{E} = - \left[\frac{dV}{dL} \right]_{MAX} \hat{\mathbf{a}}_N \quad (2.7.11)$$

La operación sobre V mediante el cual se obtiene \mathbf{E} se conoce con el nombre de *gradiente*. Y no es privativo del potencial y del campo eléctrico, también aparece relacionado con un escalar y un vector en hidráulica, termodinámica y magnetismo entre otras áreas.

$$\text{Gradiente de } V = \text{grad } V = \left[\frac{dV}{dL} \right]_{MAX} \hat{\mathbf{a}}_N \quad (2.7.12)$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V \quad (2.7.13)$$

Dado que V es función de x , y y z se puede tomar su diferencia total como:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

Pero también se cumple:

$$dv = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

$$\therefore E_x = -\frac{\partial v}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad E_z = -\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\text{Luego gradiente } V = \nabla V \quad \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{\mathbf{a}}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\mathbf{a}}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mathbf{a}}_z$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{\mathbf{a}}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\mathbf{a}}_y - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mathbf{a}}_z \quad (2.7.14)$$

2.8 Energía y densidad de energía.

El trabajo necesario para establecer una distribución de carga se almacena como energía potencial en el campo eléctrico, porque si se permitiera que las cargas se movieran, este trabajo se podría recuperar como energía cinética o trabajo mecánico.

Supongamos que en cierta región no existe carga alguna y deseamos traer tres cargas puntuales desde el infinito hasta tres posiciones finales de la región antes mencionada, como se muestra en la figura (2.8.1).

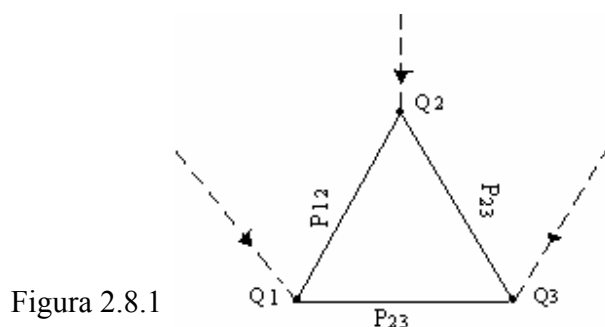


Figura 2.8.1

No se realiza trabajo para traer la primera carga, puesto que no hay campo eléctrico presente.

El trabajo necesario para traer la segunda carga debe contrarrestar el campo producido por la primera, mientras que el trabajo requerido para traer la tercera carga debe contrarrestar los campos debido a las otras dos cargas, si quisiéramos traer una cuarta carga debemos contrarrestar el campo

debido a las tres primeras y en general para traer una enésima carga debemos contrarrestar el campo debido a las $(n-1)$ cargas.

Trabajo para colocar $Q_1 = Q_1(0)=0$; Trab. Para colocar $Q_2 = Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}}$

Trabajo para colocar $Q_3 = Q_3 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{23}} \right)$;

Trabajo para colocar $Q_4 = Q_4 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{14}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{24}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{34}} \right)$

Trabajo total=W

$$W = Q_1(0) + Q_3 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{23}} \right) + Q_4 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{14}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{24}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{34}} \right) + Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} \quad (2.8.1)$$

Multiplicando por dos ambos miembros de la ecuación anterior:

$$2W = \frac{Q_2 Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} + \frac{Q_3 Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} + \frac{Q_3 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{23}} + \frac{Q_4 Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{14}} + \frac{Q_4 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{24}} + \frac{Q_4 Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{34}} + \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} + \frac{Q_1 Q_4}{4\pi\epsilon_0 R_{14}} + \frac{Q_2 Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{23}} + \frac{Q_2 Q_4}{4\pi\epsilon_0 R_{24}} + \frac{Q_3 Q_4}{4\pi\epsilon_0 R_{34}}$$

=

$$Q_1 \left[\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} + \frac{Q_4}{4\pi\epsilon_0 R_{14}} \right] + Q_2 \left[\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{23}} + \frac{Q_4}{4\pi\epsilon_0 R_{24}} \right] + Q_3 \left[\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{23}} + \frac{Q_4}{4\pi\epsilon_0 R_{34}} \right] + Q_4 \left[\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{14}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{24}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{34}} \right]$$

Podemos reconocer que cada término entre corchetes es exactamente el potencial en la posición final de cada carga e incluye las contribuciones de todas las otras cargas, excepto la de aquellas que están situadas en la posición donde el potencial está siendo evaluado, por lo tanto:

$$W = 1/2(Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3 + Q_4 V_4) \quad (2.8.2)$$

En general para cualquier número N de cargas puntuales, tendremos:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N Q_n V_n \quad (2.8.3)$$

En una región de distribución continua de carga, cada carga se reemplaza por ρdv y la suma se convierte en una integral:

$$W = \frac{1}{2} \int_{vol} \rho V dv \quad (2.8.4)$$

Las últimas dos ecuaciones permiten encontrar la energía potencial total presente en un sistema de cargas puntuales o de densidad volumétrica de carga distribuida, ecuaciones análogas se pueden obtener para distribuciones lineales o superficiales de carga.

Pero en general es preferible usar la última expresión para representar los cuatro tipos de distribuciones.

En la última ecuación reemplazaremos ρ por su igual que es $\nabla \cdot \mathbf{D}$ y apliquemos la identidad vectorial $\nabla \cdot (V\mathbf{D}) \equiv V(\nabla \cdot \mathbf{D}) + \mathbf{D} \cdot (\nabla V)$

Demostración de la identidad:

$$\nabla \cdot (V\mathbf{D}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{a}}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{a}}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{a}}_z \right) \cdot V(D_x \hat{\mathbf{a}}_x + D_y \hat{\mathbf{a}}_y + D_z \hat{\mathbf{a}}_z) = \frac{\partial}{\partial x}(VD_x) + \frac{\partial}{\partial y}(VD_y) + \frac{\partial}{\partial z}(VD_z) = \\ \frac{v \partial D_x}{\partial x} + D_x \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v \partial D_y}{\partial y} + D_y \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v \partial D_z}{\partial z} + D_z \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$V(\nabla \cdot \mathbf{D}) = V \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{a}}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{a}}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{a}}_z \right) \cdot (D_x \hat{\mathbf{a}}_x + D_y \hat{\mathbf{a}}_y + D_z \hat{\mathbf{a}}_z) = V \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) =$$

$$V \frac{\partial D_x}{\partial x} + V \frac{\partial D_y}{\partial y} + V \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$V(\nabla \cdot \mathbf{D}) + \mathbf{D} \cdot (\nabla V) = V \frac{\partial D_x}{\partial x} + V \frac{\partial D_y}{\partial y} + V \frac{\partial D_z}{\partial z} + D_x \frac{\partial V}{\partial x} + D_y \frac{\partial V}{\partial y} + D_z \frac{\partial V}{\partial z} \quad \text{Q.E.D.}$$

Entonces tendremos que:

$$W = \frac{1}{2} \int_{vol} \rho V dv = \frac{1}{2} \int_{vol} (\nabla \cdot \mathbf{D}) V dv = \frac{1}{2} \int_{vol} [\nabla \cdot (V\mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot (\nabla V)] dv = \frac{1}{2} \int_{vol} [\nabla \cdot (V\mathbf{D})] dv - \frac{1}{2} \int_{vol} [\mathbf{D} \cdot (\nabla V)] dv$$

Aplicando el teorema de la divergencia, la primera integral de volumen de la ecuación anterior se convierte en una integral de superficie (cerrada), donde la superficie cerrada rodea al volumen que se esta considerando.

Este volumen debe contener toda la carga y por lo tanto no puede haber carga fuera del volumen. En consecuencia puede considerarse el volumen con extensión infinita. Se tiene:

$$W = \frac{1}{2} \oint_s (V\mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S} - \frac{1}{2} \int_{vol} \mathbf{D} \cdot (\nabla V) dv \quad (2.8.5)$$

Donde la integral de superficie es igual a cero, puesto que, sobre esta superficie cerrada que rodea al universo, se observa que V esta tendiendo a cero al menos tan rápidamente como $1/r$, \mathbf{D} esta tendiendo a cero, al menos tan rápidamente como $1/r^2$ mientras que el elemento diferencial de superficie que se asemeja cada vez mas a una porción de esfera, esta aumentando solo como r^2 . Sustituyendo $\mathbf{E} = -\nabla V$ en la integral de volumen restante se obtiene la respuesta:

$$W = \frac{1}{2} \int_{vol} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) dv = \frac{1}{2} \int_{vol} \epsilon_0 E^2 dv \quad (2.8.6)$$

Escribiendo la ecuación anterior sobre una base diferencial se tiene:

$$dw = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv \quad \text{ó bien} \quad \frac{dw}{dv} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (2.8.7)$$

Y la expresión $\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$ tiene las dimensiones de una densidad de energía (joules por metro cúbico)

Se sabe que si se integra esta densidad de energía sobre el volumen completo que contiene el campo, el resultado es realmente la energía total presente, pero no se tiene justificación para decir que la energía almacenada en cada elemento diferencial de volumen dv es $\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv$. Sin embargo esta imagen resulta conveniente y en ocasiones es usada.

2.9 Ecuaciones de Laplace y de Poisson.

Recordemos que la ecuación de la divergencia de \mathbf{D} resulto ser

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.9.1)$$

Donde ρ es la densidad volumétrica de carga, puesto que $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ y $\mathbf{E} = -\nabla V$, tendremos

$$\mathbf{D} = -\epsilon \nabla V \quad (2.9.2)$$

Sustituyendo este último valor de \mathbf{D} en la expresión de la divergencia, tendremos

$$\nabla \cdot \nabla V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.9.3)$$

La ecuación (2.9.3) es conocida como ecuación de Poisson. El doble operador nabla (divergencia el gradiente) se escribe también como ∇^2 (nabla cuadrada) y es conocido como *operador Laplaciano*, entonces la ecuación de Poisson puede escribirse como

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.9.4)$$

Si $\rho=0$ la ecuación anterior se reduce a

$$\nabla^2 V = 0 \quad (2.9.5)$$

La ecuación (2.9.5) es conocida como ecuación de Laplace.

En coordenadas rectangulares se tiene que

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (2.9.6)$$

La distribución de potencial estático para cualquier configuración de conductores se puede determinar si se encuentra la solución a la ecuación de Laplace que también satisfaga las condiciones de frontera.

CAPITULO III

CORRIENTE ELECTRICA INVARIANTE EN EL TIEMPO

3.1 Corriente y densidad de corriente.

La corriente eléctrica se define como la razón de cambio de la cantidad de carga que pasa por un punto o por un plano de referencia y se simboliza por I , esto es

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (3.1.1)$$

Si la relación dada por la ecuación es constante se tratara de una corriente invariante en el tiempo, si no es así, se hace tender a cero el intervalo Δt y en límite tendremos la corriente instantánea, que por definición es la derivada de la carga respecto al tiempo, y entonces

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad (3.1.2)$$

Las unidades de la corriente de acuerdo al análisis dimensional de la ecuación (3.1.1) son Coulomb por segundo o Amper (1C/s=1A), por razones históricas se considera el sentido positivo de la corriente como aquel en el que fluye carga positiva, aunque la conducción en los metales esta constituida por el movimiento de electrones.

En el estudio de campos se tiene más interés por los fenómenos microscópicos en lugar de los macroscópicos por lo que se ha definido el concepto de densidad de corriente que normalmente se mide en Amperes por metro cuadrado (A/m^2), se considera como un vector y se representa por \mathbf{J} .

El incremento de corriente ΔI que atraviesa una superficie ΔS normal a la densidad de corriente esta dada por

$$\Delta I = J_N \Delta S$$

Si la densidad de corriente no es normal a la superficie, se tendrá

$$\Delta I = \mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{S}$$

En el caso en que la densidad de corriente no sea uniforme la corriente total se obtiene integrando,

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.1.3)$$

Dado que la corriente se define como la rapidez con la que fluye carga a través de un punto o plano de referencia, la densidad de corriente se puede relacionar con la velocidad de una densidad volumétrica de carga en un punto. Consideremos un elemento de carga $\Delta Q = \rho_v \Delta V = \rho_v \Delta S \Delta L$, como se muestra en la figura 3.1.1a. Con la finalidad de simplificar el análisis consideremos que este elemento de carga se desplaza con una velocidad en la dirección x positiva y que en el intervalo de tiempo Δt , el elemento de carga se ha desplazado una distancia Δx como lo muestra la figura 3.1.1b. Entonces se ha movido una carga $\Delta Q = \rho_v \Delta S \Delta x$, a través de un plano de referencia perpendicular a la dirección de la velocidad, durante el intervalo de tiempo Δt , y la corriente a través de este plano de referencia será

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho_v \Delta S \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

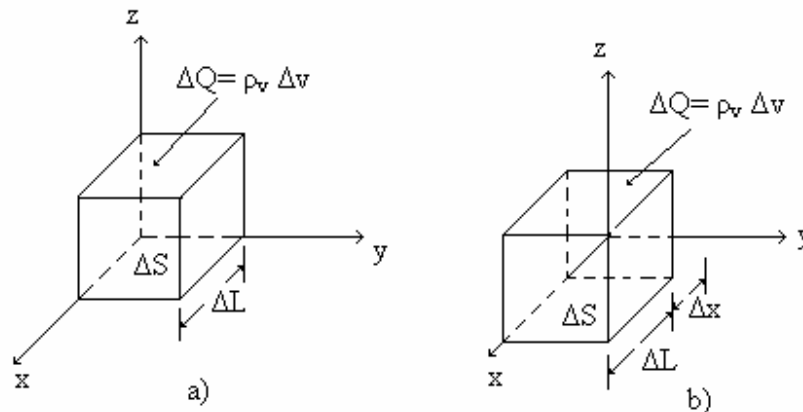


Figura 3.1.1

Si se considera el límite de $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ cuando Δt tiende a cero tendremos

$$\Delta I = \rho_v \Delta S V_x$$

Donde V_x representa la componente en x de la velocidad \mathbf{V} (no confundir con v que representa el volumen), la cual podemos describirla como

$$\frac{\Delta I}{\Delta S} = J_x = \rho_v V_x$$

La ecuación anterior la podemos representar en forma vectorial

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{V} \quad (3.1.4)$$

La ecuación (3.1.4) muestra que la carga en movimiento constituye una corriente eléctrica, a esta corriente se le conoce como corriente de convección o corriente de conducción y por lo tanto \mathbf{J} como densidad de corriente de convección.

3.2 Divergencia de \mathbf{J} y relación de continuidad de la corriente.

La presentación del concepto de corriente eléctrica es seguido por un estudio de conservación de la carga y la ecuación de continuidad. El principio de conservación de la carga se fundamenta en que la carga no se crea ni se destruye, aunque cantidades iguales de cargas positivas y negativas pueden ser simultáneamente creadas, obtenidas por separación o destruidas por recombinación, pero el todo permanece en estado natural (neutro).

La ecuación de continuidad se obtiene del principio de conservación de la carga considerando una región limitada por una superficie cerrada, la corriente que cruza esta superficie será

$$I = \oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

Y a este flujo hacia afuera de la carga positiva debe corresponder una disminución de carga positiva (o aumento de carga negativa) dentro de la superficie cerrada.

Si denotamos la carga encerrada por Q_i , entonces la razón de cambio a la que disminuye será $-dQ/dt$ y según el principio de conservación tendremos

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ_i}{dt} \quad (3.2.1)$$

La ecuación (3.2.1) representa la ecuación de continuidad de la corriente en forma integral, la ecuación de continuidad puede expresarse en forma puntual o diferencial aplicando el teorema de la divergencia

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{vol} (\nabla \cdot \mathbf{J}) dv$$

Expresando la carga encerrada Q_i por la integral de volumen de la densidad volumétrica de carga,

$$\int_{vol} (\nabla \cdot \mathbf{J}) dv = -\frac{d}{dt} \int_{vol} \rho_v dv$$

Si la superficie a través de la cual está fluyendo la carga se mantiene constante entonces podemos escribir la derivada como una derivada parcial y puede aparecer dentro del signo integral

$$\int_{vol} (\nabla \cdot \mathbf{J}) dv = \int_{vol} -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv$$

Si las dos integrales de la ecuación anterior son iguales deben serlo para cualesquier volumen y por lo tanto sus integrandos son iguales, luego

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (3.2.2)$$

La expresión anterior es la forma puntual de la ecuación de continuidad, y si recordamos la interpretación física de la divergencia, esta ecuación nos indica que la corriente o carga por segundo que sale de un pequeño volumen es igual a la razón de cambio con la que la carga decrece respecto al tiempo.

3.3 Conductores y aisladores.

El comportamiento de los electrones que rodean al núcleo esta en función de la energía total del electrón tomando como referencia cero la energía de un electrón situado a una distancia infinita del núcleo. Dado que para alejar un electrón del núcleo se debe suministrar energía, la energía de cada electrón en el átomo es una cantidad negativa. Estos valores de energía están asociados con órbitas alrededor del núcleo, de tal suerte que es más negativa la energía para las órbitas más cercanas al núcleo. De acuerdo con la teoría cuántica, sólo ciertos niveles discretos de energía, o estados de energía, son permitidos en un átomo, y entonces un electrón absorbe o entrega cantidades discretas de energía, o cuantos, al pasar de un nivel a otro.

En los sólidos los átomos están empaquetados apretadamente, muchos electrones más están presentes y otros muchos niveles permitidos de energía están disponibles debido a las fuerzas de interacción entre átomos adyacentes. Las energías que los electrones pueden poseer están agrupadas en bandas, y cada banda está constituida por numerosos niveles localizados unos muy cerca de otros. A la temperatura del cero absoluto el sólido tiene cada nivel ocupado, iniciando con los más bajos y continuando en orden hasta que todos los electrones estén colocados. Los electrones con niveles de energía menos negativa son llamados electrones de valencia y se localizan en la *banda de valencia*. Si existen niveles permitidos con niveles de energía más altos en la banda de valencia o si esta se traslapa suavemente con la banda de conducción, al aplicar una energía cinética adicional a los electrones de valencia a través de un campo externo, se produce un flujo de electrones. A este

tipo de materiales se les llama conductores metálicos. La figura 3.3.1 a muestra la banda de valencia llena y la banda de conducción vacía al cero absoluto pegada una a la otra.

Si el electrón con la mayor energía ocupa el nivel más alto en la banda de valencia y existe una brecha entre la banda de valencia y la de conducción, entonces el electrón no puede recibir la energía adicional en pequeñas cantidades y el material es conocido como *aislador*, como se muestra en la figura 3.3.1 b. Si una cantidad de energía lo suficientemente grande se puede aplicar al electrón, este sería excitado y brincaría de la banda de valencia a la de conducción, donde la conducción puede ocurrir con suma facilidad, pero en este punto se rompe el aislante.

Una tercera clase de materiales la constituyen los *semiconductores*, en estos existe sólo una pequeña brecha o región prohibida entre las bandas de valencia y de conducción, como lo muestra la figura 3.3.1 c. Se requiere de una pequeña cantidad de energía en forma de calor, luz o campo eléctrico para aumentar la energía de los electrones de la parte superior de la banda llena y así poder establecer la conducción. Este tipo de materiales tienen una amplia aplicación en dispositivos electrónicos como diodos, transistores, SCR's, etc.

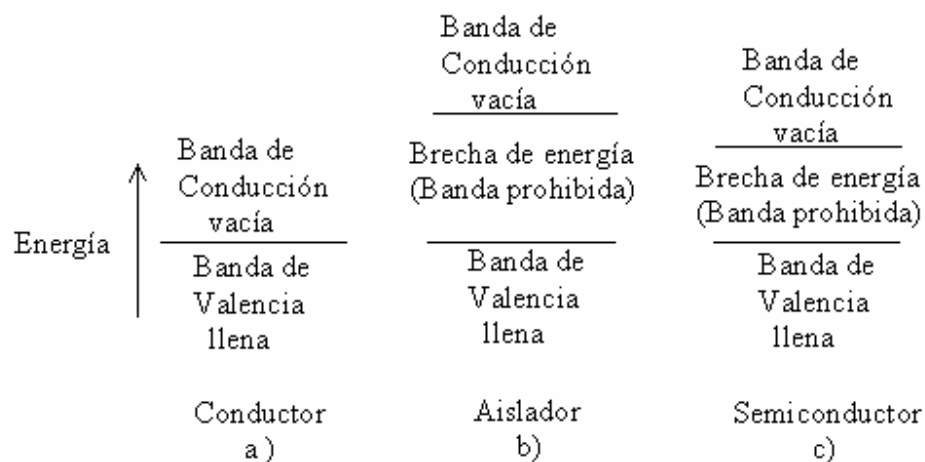


Figura 3.3.1 Estructura de bandas de energía en tres diferentes tipos de materiales a 0° K

3.4 Resistividad, conductividad y ley de Ohm

En los conductores los electrones de valencia, de conducción o libres, se mueven bajo la influencia de un campo eléctrico, de acuerdo a la ley de Coulomb un electrón experimentará una fuerza dada por

$$\mathbf{F} = -e \mathbf{E}$$

En el vacío el electrón podría acelerarse y su velocidad y energía tenderían a infinito sin embargo en una red cristalina como la de los metales este experimenta colisiones con otras partículas lo cual impide que su velocidad se incremente de manera continua y pronto alcanza una velocidad promedio que se conoce como velocidad de arrastre \mathbf{V}_d y es directamente proporcional al campo eléctrico,

$$\mathbf{V}_d = -\mu_e \mathbf{E} \quad (3.4.1)$$

Donde μ_e es la movilidad del electrón y es positiva por definición, de tal manera que si observamos la ecuación (3.4.1) podremos notar que la velocidad de arrastre está en sentido opuesto al campo eléctrico y que la movilidad tiene unidades de metros cuadrados por volt-segundo, algunos valores típicos de la movilidad son 0.0012 para el aluminio, 0.0032 para el cobre y 0.0056 para la plata.

Sustituyendo la ecuación (3.4.1) en la ecuación (3.1.4) tenemos

$$\mathbf{J} = -\rho_e \mu_e \mathbf{E} \quad (3.4.2)$$

Donde ρ_e es la densidad de carga de los electrones libres que como se sabe tiene signo negativo, lo cual hace que la densidad de corriente \mathbf{J} esté en la misma dirección y sentido del campo eléctrico \mathbf{E} .

La densidad de corriente \mathbf{J} es directamente proporcional al campo eléctrico según lo podemos observar en la ecuación (3.4.2) y la constante de proporcionalidad esta dada por el producto de la movilidad y la densidad de carga de los electrones libres y es conocida como conductividad del material y se designa por la letra griega sigma minúscula,

$$\text{asi } \sigma = -\rho_e \mu_e \quad (3.4.3)$$

las unidades de σ son siemens por metro (S/m), muy a menudo se usa el reciproco de σ que recibe el nombre de resistividad y es identificada por la griega ro ρ en ohm-metro ($\Omega \cdot m$), por lo que la conductividad también se puede expresar en $1/(\Omega \cdot m)$.

De manera que la densidad de corriente se puede expresar como

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (3.4.4)$$

A la ecuación (3.4.4) se le conoce como forma puntual de la ley de Ohm.

Los conductores metálicos obedecen la ley de Ohm, la cual es una relación lineal, el valor de la conductividad es esencialmente constante, en el apéndice A se muestra una tabla con los valores de conductividad para distintos materiales.

Sin embargo la resistividad (que es el reciproco de la conductividad) varía linealmente con la temperatura en un amplio rango de temperaturas.

A mayor temperatura se produce una mayor vibración de la red cristalina, y por lo tanto el avance del electrón se vuelve más complicado para una intensidad de campo eléctrico determinada y esto trae como consecuencia una disminución en la velocidad de arrastre, y por ende la movilidad del electrón se verá disminuida y de acuerdo con la ecuación (3.4.3), menor conductividad que implica mayor resistividad.

La aplicación de la ley de Ohm en forma puntual en un elemento de volumen como se muestra en la figura 3.4.1 nos conduce a una expresión más familiar de la ley de Ohm. Supongamos que \mathbf{J} y \mathbf{E} son uniformes y por lo tanto

$$I = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = J S \quad (3.4.5)$$

Y

$$V_{ab} = -\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\mathbf{E} \cdot \int_b^a d\mathbf{L} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{L}_{ba}$$

$$V_{ab} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{L}_{ab} \quad (3.4.6)$$

O bien

$$V = EL$$

Así tendremos

$$J = \frac{I}{S} = \sigma E = \sigma \frac{V}{L}$$

si despejamos V de la ecuación anterior

$$V = \frac{L}{\sigma S} I \Rightarrow \frac{V}{I} = \frac{L}{\sigma S}$$

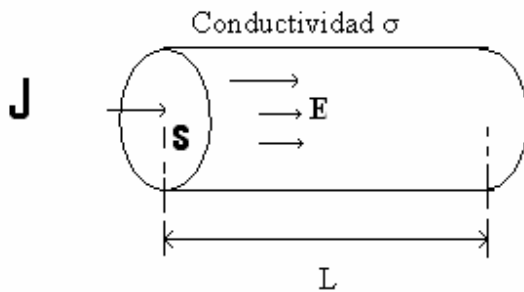


Figura 3.4.1 Densidad de corriente Uniforme e intensidad del campo Eléctrico.

A la relación voltaje corriente en la teoría elemental de circuitos se le conoce como resistencia del elemento de volumen considerado y se le asigna la letra R, entonces

$$V = RI \quad (3.4.7)$$

Donde

$$R = \frac{L}{\sigma S} \quad (3.4.8)$$

La ecuación (3.4.7) es la expresión ya conocida desde el jardín de niños de la ley de Ohm y la ecuación (3.4.8) permite calcular la resistencia R medida en Ohm (Ω) de los materiales conductores inmersos en campos uniformes. Si el campo no es uniforme, la resistencia siempre será la relación voltaje-corriente y de las ecuaciones (3.4.5) y (3.4.6) y de la forma puntual de la ley de Ohm (3.4.4), se tiene

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{-\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}{\int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}} \quad (3.4.9)$$

Se considera la integral de línea entre dos superficies equipotenciales en el conductor, y la integral de superficie se evalúa sobre la más positiva de estas dos equipotenciales.

3.5 Dieléctricos, polarización y capacitores.

En los materiales conocidos como conductores, los electrones de las últimas capas pueden emigrar con suma facilidad ante la presencia de un campo eléctrico, no así en los dieléctricos donde estos electrones están fuertemente unidos y esta característica los hace buenos aisladores. Ejemplos de estos materiales son la baquelita, la madera, el papel, entre otros.

La permitividad es una de las características importantes de los materiales dieléctricos, se identifica con la letra griega epsilon (ϵ), se usa como referencia la permitividad del vacío y se identifica con el subíndice cero (ϵ_0), más que la permitividad de cierto material nos da más elementos de juicio su permitividad relativa (ϵ_r), pues esta nos indica cuanto mayor o cuanto menor es la permitividad de este material que la del aire. La permitividad relativa se define como la relación de la permitividad del medio entre la permitividad del aire, esto es:

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (3.5.1)$$

Donde: ϵ_r =permitividad relativa del dieléctrico; ϵ =permitividad del dieléctrico; ϵ_0 =permitividad del vacío= 8.854×10^{-12} F/m (farad/metro), estas unidades serán demostradas posteriormente, por ahora el lector las debe aceptar como un artículo de fe.

Valores de permitividad relativa también conocida como constante dieléctrica se dan normalmente en tablas para los dieléctricos más comunes como se muestra a continuación, nótese que la permitividad relativa del aire es muy cercana a la unidad por lo que regularmente se considera que el aire es equivalente al vacío.

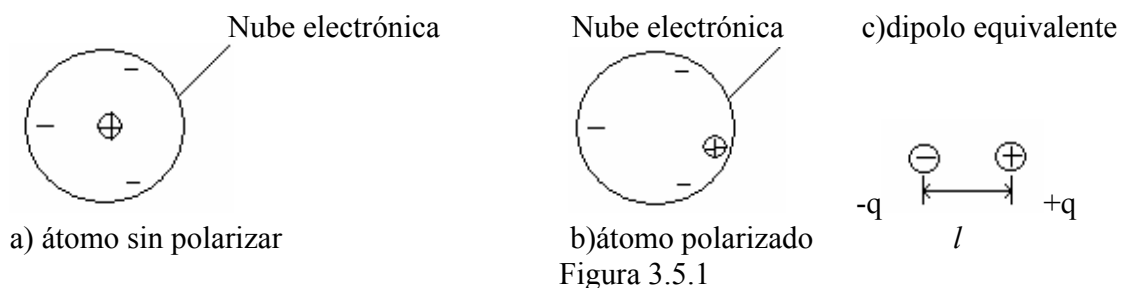
Medio	Permitividad relativa
Vacío	1
Aire (a presión atmosférica)	1.0006
Parafina	2.1
Madera	2.1
Poliestireno	2.7
Ámbar	3
Caucho	3
Suelo de arena seca	3.4
Nilón(sólido)	3.8
Azufre	4
Cuarzo	5
Baquelita	5
Formica	6
Mica	6
Mármol	8
Amoniaco(líquido)	22
Glicerina	50
Agua destilada	81

Tabla 3.5.1 Permitividad de medios dieléctricos para campos estáticos.

Polarización.

Ya se dijo con anterioridad que no hay desplazamiento de carga en los materiales dieléctricos en presencia de campos eléctricos ordinarios, sin embargo si ocurre un desplazamiento de los órbitas de los electrones de valencia, a estas órbitas se les conoce como nube electrónica, este desplazamiento de la carga se comporta como si fuesen dipolos muy pequeños. Se dice que el dieléctrico está polarizado cuando los dipolos están presentes. Para la mayor parte de los dieléctricos la supresión del campo eléctrico trae consigo la desaparición de los dipolos.

Cuando un átomo no está polarizado, la nube electrónica rodea al átomo simétricamente, como se muestra en la figura 3.5.1 a y el momento del dipolo es cero (las cargas puntuales equivalentes positiva y negativa, tienen desplazamiento cero). Ante la presencia de un campo electrostático la nube electrónica se ve desplazada ligeramente volviéndose un tanto asimétrica como se muestra en la figura 3.5.1 b, y el átomo está polarizado. El átomo puede representarse por su dipolo equivalente de cargas puntuales como se muestra en la figura 3.5.1 c y su momento dipolar será $p=ql$.



Consideremos una placa de material dieléctrico de permitividad ϵ como se muestra en la figura 3.5.2a situada en el vacío. Al aplicar un campo eléctrico \vec{E} , este polariza el dieléctrico, es decir induce dipolos en toda la placa en el interior las cargas positivas y negativas de dipolos adyacentes anulan sus efectos entre si. El resultado neto de la polarización es producir una capa de carga negativa sobre una superficie de la placa y una placa de carga positiva sobre la otra, como se muestra en la figura 3.5.2a .

El efecto de los dipolos atómicos se describe como la polarización \vec{P} , que se define como el momento dipolar por unidad de volumen. Esto es:

$$P = \frac{n}{v} ql = \frac{Ql}{v} \quad (3.5.2)$$

Donde n =número de dipolos en el volumen v
 $Q=nq$ =carga de todos los dipolos
 Ql = momento dipolar neto en el volumen v

Por ejemplo, consideremos el volumen rectangular de área superficial A y espesor L ($v=AL$) de la figura 3.5.2a . Entonces para este volumen

$$P = \frac{QL}{AL} = \frac{Q}{A} = \rho_{sp} \quad (C/m^2) \quad (3.5.3)$$

Donde ρ_{sp} es la densidad superficial de carga que aparece en las caras de la placa. Luego P tiene las dimensiones de carga por unidad de área, lo mismo que D .

El valor de P en la ecuación (3.5.3) es un promedio para el volumen v . Suponiendo un dieléctrico polarizado de manera continua, el valor de P en un punto se puede definir como el momento dipolar

neto Ql de un volumen pequeño Δv dividido entre el volumen Δv , tomando el límite cuando Δv tiende a cero alrededor del punto, así

$$P = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{Ql}{\Delta v} \quad (3.5.4)$$

Apliquemos ahora un campo eléctrico entre dos placas conductoras con un área de sección transversal A separadas por un dieléctrico de longitud d , que como veremos posteriormente no es otra cosa que un capacitor de placas paralelas, esto se muestra en la figura 3.5.2 b. El voltaje entre las placas es V , por lo que se tiene que el campo en cualquier punto entre las placas es $E=V/d$. El medio en la parte superior de las placas es aire o vacío por lo que su permitividad es ϵ_0 , mientras que en la parte inferior se tiene un dieléctrico de permitividad ϵ .

a) dieléctrico con campo eléctrico uniforme

b) capacitor con dieléctrico en la parte inferior

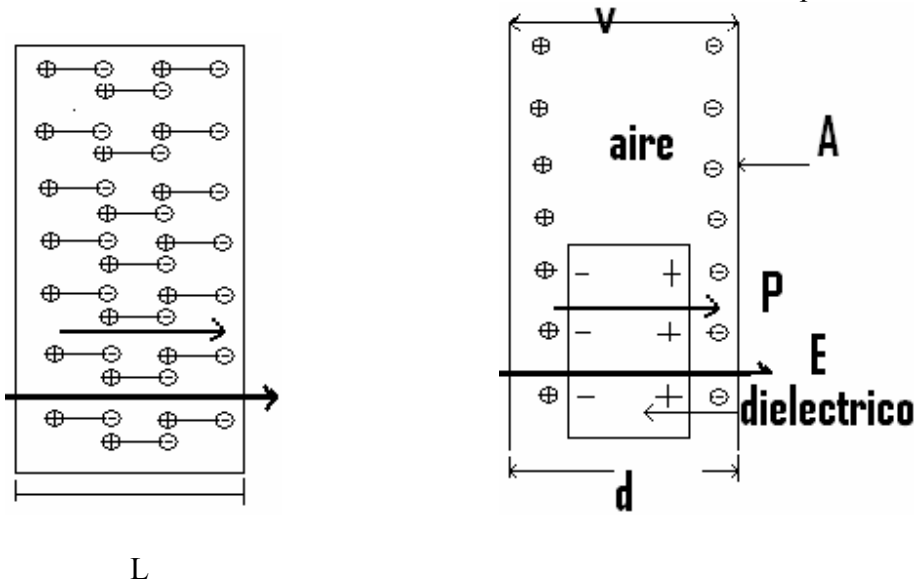


Figura 3.5.2 dieléctrico dentro de un campo eléctrico

En la parte superior del capacitor se tiene $D_0 = \epsilon_0 E$, donde D_0 es la densidad de flujo eléctrico en el vacío o en el aire.

En la parte inferior, llena de dieléctrico, el campo eléctrico polariza el dieléctrico produciendo una densidad superficial de carga ρ_{sp} que aparece en ambas caras de la placa dieléctrica. Estas cargas ligadas inducen cargas libres de signos opuestos en las placas del capacitor. En consecuencia la densidad superficial de cargas libres sobre las placas se aumenta por ρ_{sp} y entonces en el dieléctrico se tiene

$$D_d = \epsilon_0 E + \rho_{sp} \quad (3.5.5)$$

Pero de acuerdo a la ecuación (2) tenemos

$$D_d = \epsilon_0 E + P \quad (3.5.6)$$

Donde:

D_d = Densidad de flujo eléctrico en el dieléctrico

P=Polarización del dieléctrico

La ecuación (6) implica la presencia del dieléctrico por lo que el subíndice es redundante y podemos escribirla en notación vectorial

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (3.5.7)$$

En el dieléctrico también puede escribirse

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (3.5.8)$$

Donde ϵ es la permitividad del material dieléctrico. Igualando la ecuación (6) con la (8) se tiene

$$\epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (3.5.9)$$

La cual podemos escribir como $\frac{P}{E} = \epsilon - \epsilon_0$ (3.5.10)

Relaciones de cantidades eléctricas en la frontera entre distintos materiales.

Normalmente en un material el campo eléctrico varía de manera continua, si es que varía porque puede no hacerlo, esto implica que no hay variaciones bruscas del campo entre dos puntos muy cercanos entre si. No sucede lo mismo al pasar de un medio a otro, la variación puede ser grande.

El análisis de las condiciones de frontera se hace expresando los campos como la suma de dos vectores componentes, uno normal a la frontera y otro tangencial a la misma.

Analicemos primero las condiciones de las componentes tangenciales a la frontera, consideremos que dos medios dieléctricos de permitividades ϵ_1 ϵ_2 están separados por una frontera plana como se muestra en la figura 3.5.3. Consideremos una trayectoria rectangular, la mitad de la cual esta en el medio 1 y la otra en el medio 2, de longitud Δx paralela a la frontera y Δy normal a la misma. El trabajo por unidad de carga necesario para transportar una carga de prueba positiva alrededor de esta trayectoria cerrada es la integral de línea de \vec{E} alrededor de la trayectoria ($\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$). Si hacemos que la longitud Δy de la trayectoria tienda a cero, el trabajo a lo largo de los segmentos de la trayectoria normal a la frontera se hace cero. La integral de línea de \vec{E} alrededor del rectángulo en la dirección especificada en la figura 3.5.3 es

$$E_{t1} \Delta x - E_{t2} \Delta x = 0 \quad (3.5.11)$$

O lo que es lo mismo

$$E_{t1} = E_{t2} \quad (3.5.12)$$

La ecuación (3.5.12) implica que la componente tangencial del campo eléctrico es la misma a ambos lados de la frontera entre dos dieléctricos. Pero si el medio 2 es conductor el campo E_{t2} del medio 2 debe ser cero en condiciones de equilibrio electrostático y en consecuencia la ecuación (3.5.12) nos queda

$$E_{t1} = 0 \quad (3.5.13)$$

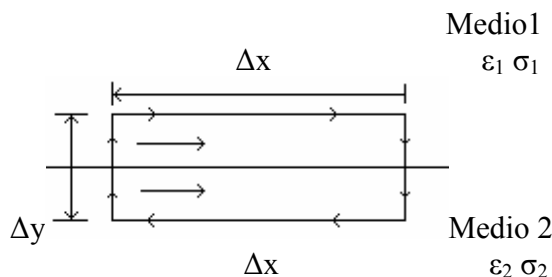


Figura 3.5.3. El campo eléctrico tangencial es continuo.

Según la ecuación (3.5.13) la componente tangencial del campo eléctrico en una frontera dieléctrico conductor es cero.

Analicemos ahora las componentes del campo eléctrico normales a la frontera, y consideremos dos medios dieléctricos separados por el plano $z=0$ como se muestra en la figura 2.6.4. Construyamos una superficie gaussiana semejante a una caja y coloquémosla de tal manera que una mitad quede en el medio 1 y la otra en el 2, el área de las tapas de la caja es $\Delta x \Delta y$ y tiene una altura Δz . Sea D_{n1} la densidad de flujo promedio perpendicular a la parte superior de la caja en el medio 1 y D_{n2} la densidad de flujo promedio perpendicular a la parte inferior de la caja en el medio 2. D_{n1} es normal hacia fuera por lo tanto es positiva, mientras que D_{n2} es normal hacia dentro por lo que es negativa. Aplicando la ley de Gauss a esta superficie gaussiana y haciendo que la altura de la caja Δz tienda a cero, la contribución de las caras laterales a la integral de superficie es cero. Suponiendo que se tiene una densidad superficial promedio de carga en la frontera de ρ_s , después de aplicar la ley de Gauss se tiene

$$D_{n1} \Delta x \Delta y - D_{n2} \Delta x \Delta y = \rho_s \Delta x \Delta y$$

O bien

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_s \quad (3.5.14)$$

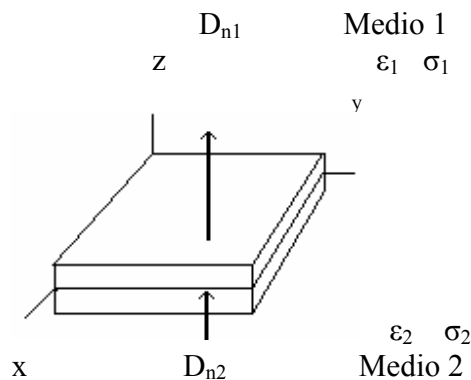


Figura 3.5.4 la componente normal de la densidad de flujo es continua A través de una frontera libre de carga.

De acuerdo con esta última ecuación la componente de la densidad de flujo cambia en una frontera cargada entre dos dieléctricos en una cantidad igual a la densidad superficial de carga, esta normalmente es cero en frontera dieléctrico-dieléctrico a menos que la carga haya sido colocada en la frontera por medios mecánicos, como el frotamiento.

Si la frontera está libre de carga $\rho_s = 0$ y la ecuación (14) queda

$$D_{n1} = D_{n2} \quad (15)$$

Según la ecuación anterior la componente normal de la densidad de flujo es continua a través de la frontera sin carga entre dos dieléctricos.

Si el medio 2 es conductor, $D_{n2} = 0$ y por lo tanto la ecuación (14) se reduce a

$$D_{n1} = \rho_s \quad (16)$$

La ecuación anterior muestra que la componente normal de la densidad de flujo en una frontera dieléctrico-conductor es igual a la densidad superficial de carga en el conductor.

Capacitancia.

Físicamente un capacitor está constituido por dos materiales conductores separados por un dieléctrico, los conductores están cargados con carga de la misma magnitud pero de signo contrario esto se puede apreciar en la figura 3.5.5, designaremos a la diferencia de potencial entre los conductores por V_o y entonces definiremos la capacitancia como la relación de la magnitud de la carga en cualquiera de los conductores y la magnitud de la diferencia de potencial que existe entre ellos.

$$C = \frac{Q}{V_o} \quad (17)$$

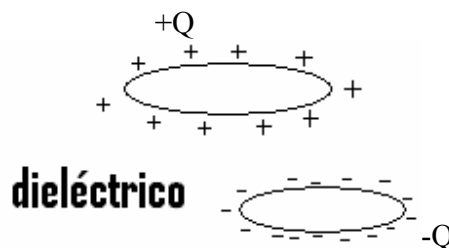


Figura 3.5.5 Capacitor

Aplicando ley de Gauss al conductor cargado positivamente y sustituyendo el resultado en el numerador de la ecuación (3.5.17) y hacer lo propio con el denominador al aplicar la definición de diferencia de potencial tomando en cuenta que nos interesa sustituir sólo la magnitud, entonces tendremos

$$C = \frac{\oint_s \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int_-^+ \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}} \quad (3.5.18)$$

La capacitancia es independiente de la cantidad de carga en los conductores y de la diferencia de potencial, esta relación siempre será constante, es decir si variamos la carga, en la misma proporción varía la diferencia de potencial y viceversa. La capacitancia depende solamente de las dimensiones físicas de los conductores y de la permitividad del dieléctrico.

Haciendo un análisis dimensional de la ecuación (3.5.17) las unidades de la capacitancia resultan ser C/V sin embargo se ha definido como unidad de la capacitancia al Farad (F) esto implica que $1C/V=1F$, no obstante como el Farad resulta ser una medida bastante grande es más común usar submúltiplos de este como el mili (m), micro (μ), nano (n) e incluso pico (p)Farad.

Ejemplos de capacitancia.

El ejemplo más común de capacitor es el de placas paralelas, si suponemos que las dimensiones de las placas conductoras son mucho mayores que la separación entre ellas entonces podremos considerarlas como láminas infinitas de carga y entonces el campo entre las placas como ya se vio anteriormente estará dado por

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon} \hat{\mathbf{a}}_z$$

La diferencia de potencial entre las placas superior inferior estará dada por

$$V_0 = -\int_{\text{superior}}^{\text{inferior}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_d^0 \frac{\rho_s}{\epsilon} dl = \frac{\rho_s}{\epsilon} d$$

Y suponiendo densidad superficial de carga uniforme se tendrá

$$Q = \rho_s S$$

Sustituyendo los valores Q y V_0 en la ecuación (17)

$$C = \frac{\rho_s S}{\frac{\rho_s}{\epsilon} d} = \frac{\epsilon S}{d} \quad (3.5.19)$$

Otro ejemplo de capacitancia lo constituye el cable coaxial con radio interno “a”, radio externo “b” y longitud “L”. La diferencia de potencial ya se dedujo en anterior sección y resultó ser

$$V_o = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a}$$

Al dividir la carga $Q = \rho_L L$ entre la diferencia de potencial resulta

$$C = \frac{\rho_L L}{\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a}} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln(b/a)} \quad (3.5.20)$$

Como último ejemplo de capacitancia consideremos dos cascarones esféricos concéntricos de radios “a” y “b” donde $b > a$. En la sección donde se discutió el tema del potencial y la diferencia de potencial para este caso se demostró que la diferencia de potencial es

$$V_{ab} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

De tal suerte que al dividir la magnitud de la carga “Q” de una de las esferas entre la magnitud de la diferencia de potencial tendremos

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \quad (3.5.21)$$

Si el radio de la esfera exterior se hace tender a infinito tendremos la capacitancia de un conductor esférico aislado,

$$C = 4\pi\epsilon a \quad (3.5.22)$$

CAPITULO IV

CAMPO MAGNETOSTÁTICO

4.1 Campo magnético producido por corrientes invariantes en el tiempo.

Un elemento de corriente $I d\mathbf{L}$ produce un campo magnético \mathbf{B} el cual a una distancia R del elemento de corriente está dado por

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I d\mathbf{L} \times \hat{\mathbf{R}}}{4\pi R^2} \quad (4.1.1)$$

La expresión anterior fue deducida por los físicos Biot y Savart por lo que se conoce como *ley de Biot-Savart*. En el sistema internacional de unidades (SI) el campo magnético \mathbf{B} se mide en Teslas [1Tesla (T)=1Weber/metro² (1Wb/m²)]. Al vector campo magnético que hemos designado con \mathbf{B} es también conocido como inducción magnética o densidad de flujo magnético. No debemos confundir la inducción magnética \mathbf{B} con la intensidad de campo magnético \mathbf{H} (donde $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$), que en ocasiones también es identificado como campo magnético y se mide en Ampere-Vuelta/metro. \mathbf{L} en la ecuación (4.1.1) representa un vector que toma la dirección y sentido de la corriente, \mathbf{R} es el vector que yace a lo largo de la línea recta que une el elemento de corriente con el punto donde se calcula el campo magnético, R es la magnitud y $\hat{\mathbf{R}}$ el vector unitario de dicho vector, la constante μ_0 se denomina permeabilidad del espacio libre, es aproximadamente igual a la del aire y tiene un valor de $4\pi \times 10^{-7}$, sus unidades son Henrys/metro (H/m) que demostraremos posteriormente, la figura 4.1.1 muestra los parámetros involucrados en la ecuación (4.1.1).

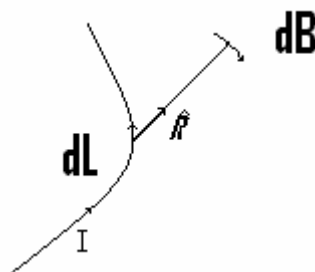


Figura 4.1.1 Campo magnético producido por un elemento de corriente.

El elemento de corriente como podemos darnos cuenta no puede existir en forma aislada, entonces el campo magnético a R metros del elemento de corriente será producido por el lazo de corriente, de tal manera que este será la integral cerrada de la ecuación (4.1.1)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{L} \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} \quad (4.1.2)$$

La ley de Biot-Savart también puede expresarse en términos de fuentes distribuidas, como la densidad de corriente \mathbf{J} y la densidad superficial de corriente \mathbf{K} . La corriente superficial fluye en una hoja cuyo espesor tiende a cero, la densidad superficial de corriente \mathbf{K} se mide en Amperes por metro de ancho, y si esta es uniforme, la corriente total en un ancho b será.

$$I = Kb$$

Para una densidad de corriente no uniforme será menester la integración:

$$I = \int K dN \quad (4.1.3)$$

Donde dN es un elemento diferencial de la trayectoria transversal al flujo de la corriente. De tal suerte que el elemento diferencial de corriente IdL , puede expresarse en términos de una densidad superficial de corriente \mathbf{K} o densidad de corriente \mathbf{J} ,

$$IdL = \mathbf{K} dS = \mathbf{J} dv \quad (4.1.4)$$

Entonces tendremos formas alternas de expresar la ley de Biot-Savart

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_s \frac{\mathbf{K} \times \hat{R} dS}{R^2} \quad (4.1.5)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{vol} \frac{\mathbf{J} \times \hat{R} dv}{R^2} \quad (4.1.6)$$

4.2 Efecto del campo magnético sobre una carga eléctrica.

Se ha demostrado experimentalmente que sobre una partícula cargada (con carga Q) que se desplaza con cierta velocidad \mathbf{v} dentro de un campo magnético \mathbf{B} , actúa una fuerza \mathbf{F} , cuya magnitud es directamente proporcional al producto de las magnitudes de la carga, la velocidad, la densidad de flujo magnético y el seno del ángulo más pequeño medido entre los vectores \mathbf{v} y \mathbf{B} . La dirección de la fuerza está dada por un vector unitario en la dirección de $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, por lo tanto la fuerza sobre dicha partícula cargada se puede representar como:

$$\mathbf{F} = Q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4.2.1)$$

Haciendo un poco de memoria podremos recordar que una partícula cargada inmersa en un campo eléctrico experimenta una fuerza, que a diferencia de la fuerza de origen magnético actúa independientemente de que la carga se encuentre en reposo o no, y su dirección es la misma que la del campo eléctrico, está dada por la ecuación $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$.

La fuerza sobre una partícula que se desplaza con cierta velocidad en una región donde están presentes campos eléctricos y magnéticos se obtiene por superposición

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.2.2)$$

La ecuación (4.2.2) es conocida como *ecuación de la fuerza de Lorentz*.

4.3 Efecto del campo magnético sobre un conductor que porta una corriente eléctrica.

La ecuación (4.2.1) podemos aplicarla a un elemento diferencial de carga en movimiento obteniendo

$$d\mathbf{F} = dQ \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4.3.1)$$

Un elemento diferencial de carga consiste en un gran número de cargas discretas muy pequeñas que ocupan un volumen que, aunque muy pequeño, es mucho mayor que el promedio de separación entre las cargas. Si se considera un elemento de carga moviéndose en un haz de electrones, la fuerza es la suma de las fuerzas sobre los electrones individuales en ese pequeño elemento de volumen, pero si está considerando un elemento de carga moviéndose dentro de un conductor, la fuerza total se aplica al mismo conductor sólido.

En una unidad anterior se definió la densidad de corriente de convección en términos de la velocidad y de la densidad volumétrica de carga, como

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v}$$

El elemento diferencial de carga de la ecuación (4.3.1) puede expresarse en términos de un elemento diferencial de volumen y de la densidad volumétrica de carga, esto es

$$dQ = \rho_v dv$$

y entonces la ecuación (9) nos quedara:

$$d\mathbf{F} = \rho_v dv \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

o bien

$$d\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} dv \quad (4.3.2)$$

Nótese que hemos representado dv como un elemento diferencial de volumen, no confundir con velocidad. Ya anteriormente vimos que $\mathbf{J}dv$ puede interpretarse como un elemento diferencial de corriente, esto es

$$\mathbf{J}dv = \mathbf{K}d\mathcal{S} = I d\mathbf{L}$$

y entonces la ecuación de la fuerza se puede aplicar a la densidad de corriente superficial,

$$d\mathbf{F} = \mathbf{K} \times \mathbf{B} d\mathcal{S} \quad (4.3.3)$$

y a un elemento diferencial de corriente,

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{L} \times \mathbf{B} \quad (4.3.4)$$

Integrando las ecuaciones (4.3.2), (4.3.3) y (4.3.4), obtenemos:

$$\mathbf{F} = \int_{vol} \mathbf{J} \times \mathbf{B} dv \quad (4.3.5)$$

$$\mathbf{F} = \int_s \mathbf{K} \times \mathbf{B} d\mathcal{S} \quad (4.3.6)$$

$$\mathbf{F} = \oint I d\mathbf{L} \times \mathbf{B} = -I \oint \mathbf{B} \times d\mathbf{L} \quad (4.3.7)$$

Al aplicar (4.3.7) a un conductor recto en un campo magnético uniforme tendremos

$$\mathbf{F} = I \mathbf{L} \times \mathbf{B} \quad (4.3.8)$$

Y su magnitud estará dada por

$$F = BIL \sin\theta \quad (4.3.9)$$

Donde θ es el ángulo más pequeño medido entre los vectores que representan la dirección en que fluye la corriente y la dirección de la densidad de flujo magnético.

4.4 Fuerza y momento de torsión sobre un circuito cerrado.

La definición de momento de torsión de una fuerza, que en el estudio de las máquinas eléctricas también es conocido como par electromagnético o en ocasiones simplemente par (en lo sucesivo lo identificaremos como par), es el vector resultado del producto cruz entre los vectores \mathbf{R} y \mathbf{F} donde \mathbf{R} es el vector que se extiende desde el origen con respecto al cual se va a calcular el par (el origen es previamente seleccionado de manera arbitraria, como muchas de las cosas que se hacen en nuestro país), hasta el punto de aplicación de la fuerza \mathbf{F} , esto es $\mathbf{T}=\mathbf{R}\times\mathbf{F}$. Consideremos el par sobre un circuito diferencial de corriente inmerso en un campo magnético \mathbf{B} , como se muestra en la figura 4.4.1.

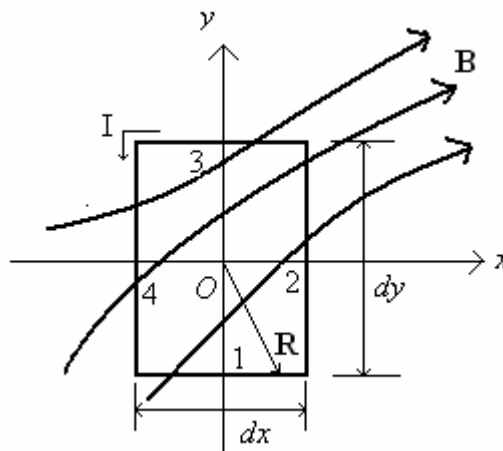


Figura 4.4.1 Lazo diferencial de corriente en un Campo magnético \mathbf{B} .

Consideremos que el valor del campo magnético en el centro del lazo de corriente es \mathbf{B}_0 y puesto que las dimensiones del lazo son diferenciales, podemos asumir que el valor de \mathbf{B} en todos los puntos del circuito es \mathbf{B}_0 . Calculemos el par seleccionando como origen el centro del lazo.

La fuerza ejercida sobre el lado 1 es

$$d\mathbf{F}_1 = I dx \hat{\mathbf{a}}_x \times \mathbf{B}_0$$

$$d\mathbf{F}_1 = I dx (B_{0y} \hat{\mathbf{a}}_z - B_{0z} \hat{\mathbf{a}}_y)$$

para el lado 1 el brazo de palanca \mathbf{R} se extiende desde el origen hasta el punto medio de este lado, es decir, $\mathbf{R}_1 = -(1/2) dy \hat{\mathbf{a}}_y$, y el par debido a la fuerza 1 será

$$\begin{aligned} d\mathbf{T}_1 &= \mathbf{R}_1 \times d\mathbf{F}_1 \\ &= -(1/2) dy \hat{\mathbf{a}}_y \times I dx (B_{0y} \hat{\mathbf{a}}_z - B_{0z} \hat{\mathbf{a}}_y) \\ &= -(1/2) dx dy I B_{0y} \hat{\mathbf{a}}_x \end{aligned}$$

Entonces la contribución al par sobre el lado 3 es la misma,

$$d\mathbf{T}_3 = \mathbf{R}_3 \times d\mathbf{F}_3 = (1/2) dy \hat{\mathbf{a}}_y \times (-I dx \hat{\mathbf{a}}_x \times \mathbf{B}_0)$$

$$Y \quad =-(1/2)dxdyIB_{oy} \hat{a}_x=d\mathbf{T}_1$$

$$d\mathbf{T}_1+d\mathbf{T}_3=- dxdyI B_{oy} \hat{a}_x$$

De manera análoga para los lados 2 y 4 tendremos

$$d\mathbf{T}_2+d\mathbf{T}_4= dxdyI B_{ox}\hat{a}_y$$

entonces el par total será

$$d\mathbf{T}=Idxdy (B_{ox}\hat{a}_y- B_{oy} \hat{a}_x) \quad (4.4.1)$$

la cantidad dentro del paréntesis se puede expresar mediante un producto cruz

$$d\mathbf{T}=Idxdy (\hat{a}_z \times \mathbf{B}_o) \quad (4.4.2)$$

o lo que es lo mismo

$$d\mathbf{T}=Id\mathbf{S} \times \mathbf{B} \quad (4.4.3)$$

donde $d\mathbf{S}$ es el vector del área del lazo diferencial de corriente y el subíndice sobre la inducción magnética (densidad de flujo) se ha omitido.

El momento dipolar magnético \mathbf{m} se define como el producto de la corriente en el lazo por el vector área del lazo y sus unidades serán $A \cdot m^2$, esto es

$$d\mathbf{m}=Id\mathbf{S} \quad (4.4.4)$$

Entonces podemos expresar el par de la manera siguiente

$$d\mathbf{T}=d\mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (4.4.5)$$

4.5 Campo magnético debido a un conductor recto de longitud infinita.

Consideremos por simplicidad en el análisis un conductor que yace a lo largo del eje "z" y se extiende desde $-\infty$ hasta $+\infty$, que porta una corriente I , seleccionemos un elemento diferencial de corriente en el punto 1 y evaluemos el campo magnético en el punto 2, como se muestra en la figura 4.5.1.

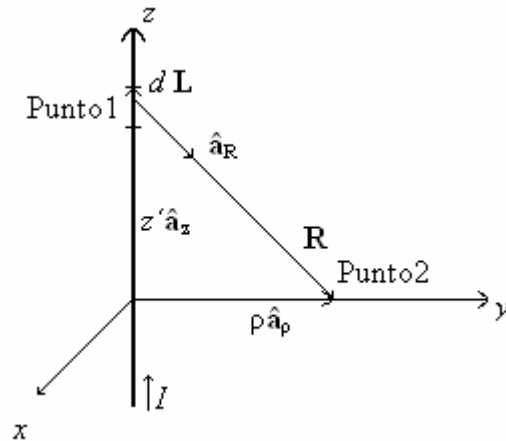


Figura 4.5.1 Filamento recto de longitud infinita que porta una corriente I.

Luego entonces

$$\mathbf{R} = \rho \hat{\mathbf{a}}_\rho - z' \hat{\mathbf{a}}_z \quad \text{y por lo tanto} \quad \hat{\mathbf{a}}_R = (\rho \hat{\mathbf{a}}_\rho - z' \hat{\mathbf{a}}_z) / \sqrt{\rho^2 + z'^2}$$

Considerando $d\mathbf{L} = dz' \hat{\mathbf{a}}_z$, y sustituyendo las relaciones anteriores en la ecuación (4.1.2), tendremos:

$$\mathbf{B} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0 I dz' \hat{\mathbf{a}}_z (\rho \hat{\mathbf{a}}_\rho - z' \hat{\mathbf{a}}_z)}{4\pi (\rho^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho dz' \hat{\mathbf{a}}_\phi}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$$

El vector unitario $\hat{\mathbf{a}}_\phi$ cambia con la coordenada ϕ pero no con ρ ni con z y dado que la variable de integración es z' , entonces $\hat{\mathbf{a}}_\phi$ es constante y puede salir del signo integral,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I \rho \hat{\mathbf{a}}_\phi}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I \rho \hat{\mathbf{a}}_\phi}{4\pi} \left. \frac{z'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} \right|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{\mathbf{a}}_\phi \quad (4.4.6)$$

Como puede notarse en la ecuación (4.4.6) el campo magnético no es función de Φ ni de z , solamente varia inversamente con la distancia más corta entre el filamento y el punto donde se calcula este. La dirección del campo magnético es circunferencial, por lo tanto las líneas de campo son círculos concéntricos al conductor, como se muestra en la figura 4.5.2.

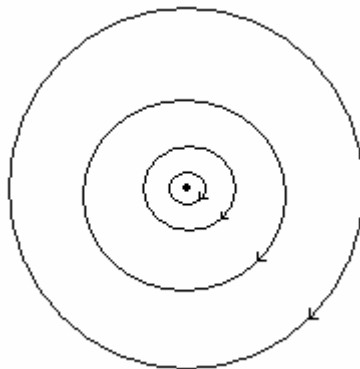


Figura 4.5.2 Líneas de campo magnético debidas a la corriente en un conductor recto e infinito.

4.6 Flujo magnético y densidad de flujo magnético.

La magnitud del campo magnético \mathbf{B} definido por la ecuación varía inversamente con el cuadrado de la distancia del elemento de corriente que lo produce. Debido a esta dependencia del inverso del cuadrado de la distancia, la magnitud del campo \mathbf{B} es también llamada magnitud de la *densidad de flujo magnético*. Hemos mencionado con anterioridad que las unidades de \mathbf{B} son Teslas y que $1\text{T}=1\text{Wb}/\text{m}^2$. Podemos ahora el *flujo magnético* a través de un elemento de área dA como:

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad \text{Wb} \quad (4.6.1)$$

En la figura 4.4 se muestra que el flujo magnético total a través de un área finita está dado por:

$$\phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (4.6.2)$$

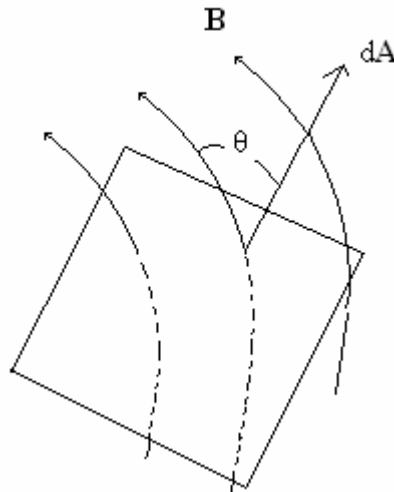


Figura 4.6.1 Flujo a través de una pequeña área dA

4.7 Ley de Gauss para campos magnéticos.

Una ley similar a la ley de Gauss para el flujo eléctrico

$$\psi = \oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q$$

Puede ser escrita para el flujo magnético

$$\phi = \oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (4.7.1)$$

Esto es debido a que no existen mono polos magnéticos, esto es no podemos tener aislado un polo norte de un polo sur o viceversa. La implicación de la ecuación (4.7.1) es que las líneas de campo magnético no pueden emanar de una fuente y terminar en un

sumidero, en otras palabras las líneas magnéticas son lazos cerrados. Para cualquier superficie cerrada el número de líneas que entran en ella es igual al número de líneas que salen. Aplicando el teorema de la divergencia $\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int_{vol} \nabla \cdot \mathbf{B}$, podemos expresar la ecuación (4.7.1) en forma diferencial

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.7.2)$$

Las ecuaciones (4.7.1) y (4.7.2) como veremos más tarde constituyen las formas integral y diferencial de una de las leyes de Maxwell.

4.8 Ley de Ampère.

De manera análoga en que la ley de Gauss muestra una forma alternativa a la ley de Coulomb para relacionar la carga eléctrica con el campo eléctrico, una alternativa a la ley de Biot y Savart que relaciona el campo magnético con la corriente eléctrica es la ley de Ampère, que al igual que la ley de Gauss tiene aplicación en problemas con algún grado de simetría.

Para deducir la ley de Ampère, consideremos primero el campo magnético producido por una corriente I fluyendo en un conductor recto de longitud infinita. A una distancia R del alambre, la magnitud del campo B esta dada de acuerdo a la ecuación (4.4.6) por

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi\rho}$$

Donde ρ es una de las coordenadas (cilíndricas) del punto donde se calcula el campo magnético, que coincide con R la distancia más corta entre el conductor y el punto donde se calcula el campo sólo si el conductor yace sobre el eje “z” como se muestra en la figura 4.2 y las líneas de campo son líneas concéntricas al conductor. Una integración del campo magnético \mathbf{B} alrededor de una trayectoria circular concéntrica al conductor y con un radio R nos queda

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint Bl = \frac{\mu_o I}{2\pi R} \oint dl = \frac{\mu_o I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_o I$$

Se puede demostrar que la ecuación (4.4.6) es válida aún cuando la trayectoria de integración no sea circular o inclusive cuando esta sea no concéntrica al conductor. La corriente I representa la corriente neta encerrada por la trayectoria.

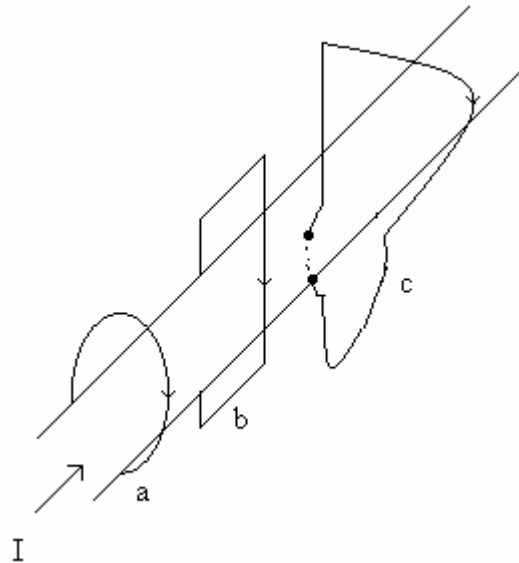


Figura 4.8.1 Conductor con una corriente I .
Las trayectorias a y b encierran la totalidad
de la corriente, la c, sólo una fracción.

En la figura 4.8.1 se muestra un conductor recto que porta una corriente total I, la integral de línea de \mathbf{B} alrededor de las trayectorias cerradas marcadas con las letras a y b conduce a una respuesta igual $\mu_0 I$, la integral alrededor de la trayectoria cerrada marcada con la letra c, que pasa a través del conductor, da una fracción de $\mu_0 I$, exactamente igual a la porción de la corriente total que queda encerrada por la trayectoria c, multiplicada por la permeabilidad del aire μ_0 .

Entonces generalizando, la ley de Ampère nos indica que la integral de \mathbf{B} a lo largo de cualquier trayectoria cerrada es numéricamente igual a la corriente neta encerrada por dicha trayectoria multiplicada por la permeabilidad del espacio libre, y se representa por la ecuación

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \mu_0 I \quad (4.8.1)$$

4.9 Intensidad de campo magnético H y fuerza magnetomotriz \mathcal{F} .

La relación desarrollada por Biot y Savat para el campo magnético (ecuación 4.1.1) es válida únicamente para el espacio libre. Esto explica la aparición de la constante μ_0 que se definió como permeabilidad del espacio libre. Esto implica que la relación entre el campo magnético B y la corriente I es lineal. Existe una gran cantidad de materiales para los cuales la relación entre B e I es lineal (incluye todos los dieléctricos y algunos metales) a este tipo de materiales se les conoce como *no magnéticos*, y se puede asociar una constante de permeabilidad a cada uno de ellos, para fines prácticos la consideraremos igual a μ_0 .

Existe una clase de materiales reducida que presenta intensidades de campo magnético muy grandes en comparación con los conocidos como no magnéticos, a estos se les denomina *ferromagnéticos* pero usualmente se les llama simplemente magnéticos. La permeabilidad μ para esta clase de materiales es mucho mayor que la permeabilidad del vacío μ_0 , y la relación entre el campo magnético B y la corriente I es no lineal, ya que μ no es constante, varía conforme lo hace la corriente I.

Ya en la sección 4.1 mencionamos que existe un vector al que en ocasiones también se le llama campo magnético pero que estrictamente hablando se define como intensidad de campo magnético, se identifica con \mathbf{H} y es proporcional con la densidad de flujo \mathbf{B} , esto es

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (4.9.1)$$

Podemos demostrar que \mathbf{H} es independiente del medio. Esto es, \mathbf{H} no cambia cuando un material magnético es sustituido por espacio libre y viceversa. Si dividimos la ecuación (4.1.1) por μ_0 , la cantidad \mathbf{H} independientemente del medio es

$$d\mathbf{H} = \frac{Id\mathbf{L} \times \hat{\mathbf{a}}_R}{4\pi R^2} \quad (4.9.2)$$

Se define la permeabilidad relativa μ_r como

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (4.9.3)$$

Entonces si despejamos $\mu = \mu_r \mu_0$ y sustituimos en la ecuación (4.9.1), podemos notar que μ_r representa el número de veces que la permeabilidad del medio es mayor o menor que la del vacío, esto implica que sin aumentar la corriente podemos tener una densidad de flujo magnético \mathbf{B} mayor si sustituimos el medio por otro que tenga una permeabilidad relativa mayor a uno.

La ley de Ampère ecuación (4.8.1) puede ser escrita en función de la intensidad de campo magnético \mathbf{H}

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I \quad (4.9.4)$$

La ecuación (4.9.4) es una forma más general de representar la ley de Ampère, dado que a diferencia de la ecuación (4.8.1) es independiente del medio involucrado en la trayectoria de integración y podemos notar que las unidades de \mathbf{H} son Ampere por metro (A/m).

Si la trayectoria encierra una corriente N veces, el lado derecho de la ecuación (4.9.4) se convierte simplemente en NI . Esto bien podría considerarse como la trayectoria encerrando a una bobina de N vueltas.

Podemos ahora definir la fuerza magnetomotriz (fmm = \mathcal{F}) como

$$\mathcal{F} = NI = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \quad (4.9.5)$$

Como puede notarse las unidades de la fuerza magnetomotriz son Ampere, sin embargo para enfatizar que no se trata simplemente de una corriente sino de una fmm se estila expresarla en unidades de Ampere-vueltas (A-v), en ocasiones se representa (A-T) de la inicial en inglés (Turn), simplemente para no confundir con volt.

4.10 Inductancia e Inductores.

Al igual que la capacitancia, la inductancia L es una propiedad del arreglo físico de los conductores, aunque está definida por la razón del flujo magnético y la corriente que fluye en un circuito de manera análoga en que se definió capacitancia como la razón carga voltaje, no obstante la razón de estos parámetros en ambos casos es constante. Cuando hablamos de flujo magnético, es común que nos estemos refiriendo al flujo enlazado por una bobina de N vueltas, por lo que en lo sucesivo llamaremos a este, flujo ligado o flujo enlazado o simplemente encadenamientos de flujo y será igual a

$$\Lambda = N\phi = N \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad \text{Wb} \quad (4.10.1)$$

Entonces de acuerdo a la definición de inductancia podemos expresarla por la ecuación

$$L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{N \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}}{I} \quad \text{H} \quad (4.10.2)$$

Sus unidades son Henrys (H). Ahora estamos en condiciones de deducir las unidades de la permeabilidad μ como lo habíamos prometido en la sección 4.1, si asumimos que la densidad de flujo \mathbf{B} es uniforme en toda la superficie y normal a ella, la ecuación (4.10.2) nos quedará

$$L = \frac{NBA}{I}$$

Y recordando que $B = \mu H$, entonces tendremos $L = \frac{N\mu HA}{I}$ si despejamos μ

$$\mu = \frac{LI}{NHA} \quad (4.10.3)$$

Haciendo un análisis dimensional en la ecuación (4.10.3) podemos comprobar que efectivamente las unidades de μ son Henrys por metro (H/m).

Inductancia interna de un conductor cilíndrico y de una línea de transmisión coaxial.

Supongamos que un conductor cilíndrico sólido de radio “a” porta una corriente I distribuida uniformemente a través de su sección transversa como se muestra en la figura 4.10.1. La densidad de corriente J es igual a $I/\pi a^2$. De la ley de Ampère tenemos que el campo magnético fuera del conductor está dado por

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{para } r \geq a \quad (4.10.4)$$

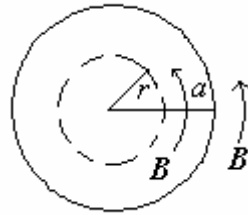


Figura 4.10.1 Campo magnético dentro y fuera de un conductor que lleva una corriente uniformemente distribuida.

Y forma círculos concéntricos al conductor. Dentro del conductor la ley de Ampère nos indica que el campo magnético B está determinado solamente por la fracción de la corriente encerrada por una trayectoria circular con centro en el conductor y de radio $r \leq a$. Esto es

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \mu_o \iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$$

$$B 2\pi r = \mu_o J \pi r^2$$

$$B = \frac{\mu_o J r}{2}$$

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi a^2} r \quad r \leq a \quad (4.10.5)$$

Entonces el flujo en elemento tubular de espesor dr será

$$d\phi = B dA = \frac{\mu_o r I}{2\pi a^2} \quad \text{Wb/m}$$

Y los encadenamientos de flujo estarán dados por

$d\Lambda = N d\phi$ donde N será la fracción de la corriente enlazada e igual a $\frac{r^2}{a^2}$, luego entonces

$$d\Lambda = \frac{\mu_o r^3 I dr}{2\pi a^4} \quad \text{Wb-T/m} \quad (4.10.6)$$

Integrando la ecuación (39) obtenemos los encadenamientos de flujo totales

$$\Lambda = \int_{r=0}^{r=a} \frac{\mu_o I r^3 dr}{2\pi a^4} = \frac{\mu_o I}{2\pi a^4} \frac{r^4}{4} \Big|_0^a = \frac{\mu_o I}{8\pi} \quad \text{Wb-T/m} \quad (4.10.7)$$

Dado que la inductancia es por definición la relación de los encadenamientos de flujo entre la corriente, la inductancia interna del conductor está dada por

$$L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{\mu_o}{8\pi} \quad \text{H/m} \quad (4.10.8)$$

La figura 4.10.2 muestra una línea de transmisión coaxial donde el conductor interior de radio “a” lleva una corriente I y el conductor exterior de radio “b” conduce la corriente de retorno. De acuerdo a la ley de Ampère la densidad de flujo magnético en la región entre los dos conductores es determinada por la corriente del conductor interior y está dada por

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \quad \text{para } a < r < b$$

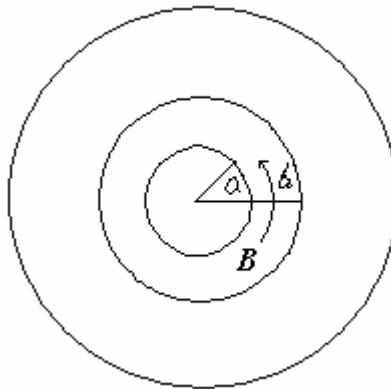


Figura 4.10.2 sección transversal de un cable coaxial

Situando el conductor sobre el eje “z” de las coordenadas cilíndricas, la densidad de flujo magnético estará en la dirección del vector unitario \hat{a}_ϕ , y los encadenamientos de flujo serán

$$\Lambda = N\phi = N \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

Donde N desde luego que es igual a la unidad y dA es un diferencial de área normal a las líneas de campo magnético y está dada por $dl dr \hat{a}_\phi$ donde l es la longitud de la línea, y los encadenamientos de flujo estarán dados por

$$\Lambda = \iint \left(\frac{\mu_o I}{2\pi r} \hat{a}_\phi \right) \cdot (dl dr \hat{a}_\phi) = \frac{\mu_o I l}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_o I l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Entonces la inductancia por metro de longitud de la línea será

$$L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{\mu_o I}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad \text{H/m} \quad (4.10.9)$$

Inductancia de un solenoide.

Un solenoide está constituido por un enrollamiento de alambre de manera helicoidal alrededor de un núcleo que puede incluso ser aire, una sección transversal de este es mostrada en la figura 4.10.4. Antes de determinar el campo magnético debido a un solenoide determinaremos el campo magnético a lo largo del eje de una espira, la figura 4.8 muestra una espira circular de radio “ a ” con el centro en el origen de un sistema de coordenadas y colocada sobre el plano $z=0$. La contribución de un pequeño elemento de corriente dl al campo magnético en un punto sobre el eje de la espira, es decir sobre el eje “ z ”, esta dada por la expresión de la ley de Biot/Savart, esto es

$$dB = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{dl \times \hat{R}}{R^2} = \frac{\mu_o I dl}{4\pi R^2}$$

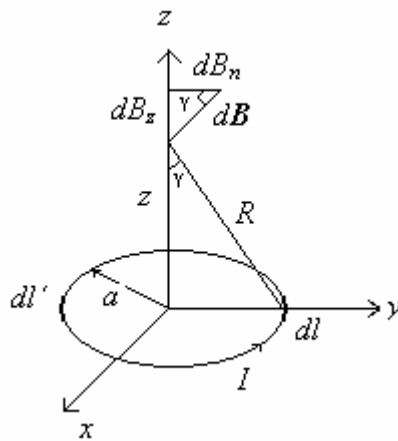


Figura 4.10.3 Espira con corriente que produce un campo Magnético en un punto sobre el eje de la espira.

Esto se debe a que el vector unitario \hat{R} es normal a cualquier segmento dl a lo largo de toda la espira. El campo dB forma un ángulo recto con el segmento dl y con el vector R , pero cuando consideramos la contribución dB' debida a un elemento diametralmente opuesto dl' , podemos notar que la componente dB_n la cual es perpendicular al eje se *cancela*. Esta cancelación se da en toda la circunferencia debido a que siempre habrá un segmento que cancele el efecto del segmento diametralmente opuesto, únicamente existirá la componente $dB_z = dB \text{ sen}\gamma$. El campo total estará dado por la suma de todos los elementos dB_z .

$$B_z = \int dB_z = \frac{\mu_o I \text{ sen}\gamma}{4\pi R^2} \oint dl$$

La integral cerrada alrededor de la espira es, como ya lo vimos en el primer grado de primaria, igual a $2\pi a$, de acuerdo al teorema de Pitágoras $R = \sqrt{a^2 + z^2}$ y de la figura 4.10.3, $\text{sen}\gamma = a/R$, por lo tanto el campo a lo largo del eje “ z ” será

$$B = B_z = \frac{\mu_o I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad \text{Wb/m}^2 \quad (4.10.10)$$

Podemos obtener ahora el campo magnético en el centro de la espira donde $z=0$

$$B = B_z = \frac{\mu_o I}{2a} \quad \text{Wb/m}^2 \quad (4.10.11)$$

Para determinar el campo magnético a lo largo del eje del solenoide, partiremos de la ecuación (4.10.10) que es el campo debido a una espira (lazo de corriente), podemos considerar al solenoide como “N” lazos de corriente y calcular el campo a partir de esta ecuación. La contribución de una pequeña sección del solenoide de longitud dz estará dada por

$$dB_z = \frac{\mu_o a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \frac{NI}{l} dz \quad (4.10.12)$$

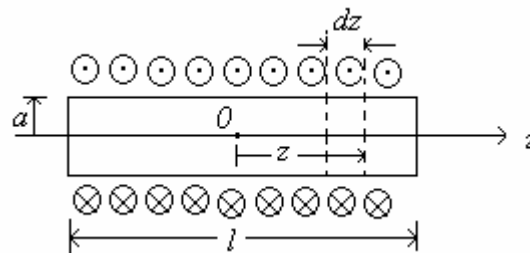


Figura 4.10.4 Sección transversal de un solenoide

Donde el número de vueltas del segmento de solenoide dz es la fracción Ndz/l . El campo total B en el punto 0 se puede obtener mediante la integración de la ecuación (4.10.12) a lo largo de la longitud de la bobina

$$B_z = \frac{\mu_o NI a^2}{2l} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_o NI}{(4a^2 + l^2)^{1/2}} \quad (4.10.13)$$

Para un solenoide mucho muy largo comparado con su radio, es decir “ a ” es despreciable respecto a “ l ”, el campo axial será

$$B = \frac{\mu_o NI}{l} \quad (4.10.14)$$

La ecuación anterior nos da el campo magnético, estrictamente hablando, en el centro de un solenoide infinito. Sin embargo en el centro de una bobina cuya longitud es cuatro veces mayor que su radio, la ecuación (4.10.14) nos da un resultado con una aproximación suficientemente aceptable en la solución de problemas de Ingeniería.

Recordemos que la definición de inductancia es la relación encadenamientos de flujo, corriente eléctrica, y los encadenamientos de flujo están dados por

$$\Lambda = N\phi = N \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \cong NBA \quad Wb \quad (4.10.15)$$

En la ecuación (4.10.15) asumimos que el mismo flujo está siendo ligado por las “N” vueltas y que las líneas decampo magnético son paralelas al eje del solenoide, y entonces la inductancia del solenoide será

$$L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{NBA}{I} \quad (4.10.16)$$

Una buena aproximación del campo magnético en el interior del solenoide es considerar el valor de este en el centro del mismo y despreciar el flujo disperso que pudiera existir, entonces sustituyendo la ecuación (4.10.14) en la ecuación (4.10.16)

$$L = \frac{\mu_o N^2 I A / l}{I} = \frac{\mu_o N^2 A}{l} \quad (4.10.17)$$

Otro ejemplo de inductancia de uso común es la del toroide, el cual está constituido por una bobina enrollada sobre un núcleo en forma de dona (o de rosca de Reyes como el lector lo prefiera) que a al igual que el solenoide el material puede ser inclusive aire. Dado que no se pretende coartar la iniciativa del lector, se le invita a comprobar mediante la aplicación de la ley de Ampère, que el campo magnético debido a un toroide es

$$B = \frac{\mu_o NI}{2\pi r} \quad a < r < b \quad (4.10.18)$$

$$B = 0 \quad r \geq b \quad B = 0 \quad r \leq a$$

Donde a y b son los radios interior y exterior respectivamente del toroide. Luego la inductancia del toroide será

$$L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{\mu_o N^2 A}{2\pi r} \quad (4.10.19)$$

4.11 Propiedades de los materiales magnéticos.

Después de analizar el comportamiento de un lazo con corriente inmerso en un campo magnético (sección 4.4), estamos en condiciones de comprender lo que sucede en un átomo, para distintos materiales en presencia de campos magnéticos, ya que un electrón en su orbita es análogo al pequeño lazo de corriente y como tal experimenta un par en presencia de un campo magnético externo. El par tiende a alinear el campo magnético que produce el electrón orbital con el campo magnético externo.

Un segundo momento o par lo constituye el espín del electrón. De acuerdo a la teoría cuántica relativista (esta teoría está fuera del alcance de este texto) un electrón puede tener un momento de espín magnético cercano a $\pm 9 \times 10^{-24} \text{ A}\cdot\text{m}^2$, los signos más y menos indican que el alineamiento puede ser ayudando u oponiéndose al campo magnético externo. Sólo los espines de los electrones pertenecientes a capas no llenas por completo, contribuirán al momento magnético del átomo.

Una tercera contribución al momento de un átomo si bien su efecto es despreciable sobre las propiedades magnéticas de los materiales, la origina el espín nuclear.

Cada átomo contiene muchas componentes diferentes de momento y su combinación determina las características magnéticas del material y sugiere su clasificación magnética que en general pueden ser de seis diferentes tipos a saber: diamagnéticos, paramagnéticos, ferromagnéticos, antiferromagnéticos, ferrimagnéticos y superparamagnéticos.

Los materiales diamagnéticos son aquellos en los que los pequeños campos magnéticos generados por el movimiento de los electrones en sus órbitas y los producidos por el espín del electrón, se combinan para producir un campo magnético cero. Algunos ejemplos de este tipo de materiales son bismuto, hidrogeno, helio, cloruro de sodio, cobre, oro, silicio, germanio y azufre.

En los materiales paramagnéticos los efectos del espín del electrón y del movimiento orbital no se cancelan completamente, de tal suerte que al aplicar un campo magnético externo **B**, este se ve incrementado ligeramente, entre las sustancia de este tipo se encuentran: potasio, oxígeno, tungsteno, las tierras raras y muchas de sus sales.

En los materiales ferromagnéticos cada átomo tiene un momento relativamente grande, ocasionado predominantemente por los momentos de espín del electrón no equilibrados. Las fuerzas interatómicas causan que estos momentos se alineen en forma paralela por regiones que contienen un gran número de átomos. Estas regiones son llamadas dominios y pueden tener diferentes formas y tamaños que van desde un micrómetro hasta varios centímetros que dependen entre otras cosas del material y de la historia del mismo, a esta característica se le conoce como histéresis y la retomaremos en tema posterior.

Los únicos elementos ferromagnéticos a temperatura ambiente son: hierro, níquel y cobalto, y pierden sus características a una temperatura llamada de Curie, que para el hierro es de 1043 K (770°C), sin embargo existen algunas aleaciones como alnico (aluminio, níquel-cobalto con una pequeña cantidad de cobre), y por supuesto el acero.

En los materiales antiferromagnéticos las fuerzas entre átomos adyacentes hacen que los momentos atómicos magnéticos se alineen de manera antiparalela, por lo que el momento magnético es cero, y a estos materiales los afecta sólo ligeramente la presencia de un campo magnético externo, algunos ejemplos de materiales de este tipo son el óxido de níquel (NiO), sulfuro ferroso (FeS) y cloruro de cobalto (CoCl₂).

Los materiales ferrimagnéticos presentan al igual que los antiferromagnéticos alineamiento antiparalelo de momentos atómicos adyacentes, solo que estos no son iguales por lo que se origina una gran respuesta ante la presencia de un campo magnético externo, si bien no tan grande como en los materiales ferromagnéticos. Sin embargo tienen una muy baja conductividad por lo que tienen mayor aplicación que los ferromagnéticos en los casos en que están expuestos a campos magnéticos producidos por corriente alterna de muy alta frecuencia. Esto reduce enormemente las pérdidas por corrientes parásitas en el núcleo de los devanados. Ejemplos de esta clase de materiales son: magnetita de óxido de fierro (Fe₃O₄), ferrita de níquel-zinc (Ni_{1/2}Zn_{1/2}Fe₂O₄) y la ferrita de níquel (NiFe₂O₄). Estos materiales también pierden sus propiedades a temperaturas mayores a la de Curie.

Los materiales superparamagnéticos están constituidos por partículas ferromagnéticas montadas en una matriz no ferromagnética. Aunque existen dominios dentro de las partículas individuales, las paredes de dominio no pueden penetrar el material matriz intermedio a la partícula adyacente. El ejemplo clásico lo constituyen las cintas de audio y de video.

Magnetización y permeabilidad.

Así como la corriente de conducción (electrones libres que saltan de un átomo a otro) es capaz de producir un campo magnético de intensidad \mathbf{H} , la corriente ligada o corriente amperiana (electrones orbitales, espín del electrón y espín nuclear) produce un fenómeno llamado magnetización, se identifica con la literal \mathbf{M} y tiene las mismas dimensiones que \mathbf{H} , es decir (A/m). La magnetización se puede definir en términos del momento dipolar magnético \mathbf{m} , el cual es producido por la corriente ligada I_b que circula a lo largo de una trayectoria que encierra un diferencial de área $d\mathbf{S}$, estableciendo el momento dipolar

$$\mathbf{m} = I_b d\mathbf{S}$$

si hay n dipolos magnéticos por unidad de volumen y consideramos un volumen Δv , entonces el momento dipolar magnético está dado por la sumatoria

$$\mathbf{m}_{total} = \sum_{i=1}^{n\Delta v} \mathbf{m}_i \quad (4.11.1)$$

En general cada uno de los \mathbf{m}_i es diferente, y la magnetización \mathbf{M} se define como el momento dipolar magnético por unidad de volumen,

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} \mathbf{m}_i \quad (4.11.2)$$

A partir de las ecuaciones (4.11.1) y (4.11.2) se puede demostrar que existe una ecuación muy parecida a la ley de Ampère, sólo en lugar de \mathbf{H} tendremos \mathbf{M} y en lugar de la corriente de conducción tendremos una corriente ligada I_b

$$I_b = \oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{L} \quad (4.11.3)$$

Con la finalidad de extender el estudio de los campos magnéticos a otros medios diferentes del aire o del vacío, expresaremos la ley de Ampère en términos de la corriente total, es decir la corriente libre o de conducción más la corriente ligada, esto es

$$\oint \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_o} \right) \cdot d\mathbf{L} = I_T \quad (4.11.4)$$

Donde

$$I_T = I_b + I$$

La corriente I es la corriente libre o de conducción que es la más común, es la que aparecerá en las ecuaciones de Maxwell y es la que detectan los aparatos de medición, combinando estas últimas dos ecuaciones tendremos

$$I = I_T - I_b = \oint \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_o} \right) \cdot d\mathbf{L} - \oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{L} = \oint \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_o} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{L} \quad (4.11.5)$$

De ahí que

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (4.11.6)$$

Puede observarse que $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ en el espacio libre donde la magnetización es cero, la ecuación (4.11.6) puede expresarse

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (4.11.7)$$

Para medios lineales e isotrópicos se define la susceptibilidad magnética χ_m

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (4.11.8)$$

Y entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H}) \\ &= \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} \end{aligned}$$

Luego de acuerdo con las ecuaciones (4.9.1) y (4.9.3)

$$\mu_r = 1 + \chi_m \quad (4.11.9)$$

Histéresis.

Habíamos ya mencionado que el comportamiento de los materiales ferromagnéticos depende de la historia de estos, y a esta propiedad se le da el nombre precisamente de “*histéresis*”, para ilustrar esta propiedad consideremos una bobina solenoidal cuyo núcleo esté constituido de hierro virgen (no magnetizado con anterioridad), como se muestra en la figura (4.11.1), si aumentamos la corriente desde cero hasta un valor I , la intensidad de campo magnético \mathbf{H} aumenta linealmente con la corriente I , esto lo podemos advertir si sustituimos la ecuación (4.9.1) en la (4.10.14) y usamos la permeabilidad del hierro en lugar de la del vacío, tenemos que la intensidad del campo magnético está dada por $H = NI/l$, haciendo $n = N/l$, tendremos que “ n ” es el número de vueltas por metro de longitud, y entonces $H = nI$. La densidad de flujo \mathbf{B} también se incrementa, sólo que este incremento no es lineal, como lo podemos ver en la figura (4.11.2). En el punto 0 , los dominios están orientados al azar, correspondiendo a $B=0$. Cuando el campo externo aumenta (con el incremento de la corriente), los dominios tienden a alinearse y están completamente alineados en el punto “ a ”. En este punto, el núcleo de hierro está próximo a la saturación, cuando todos los dominios están alineados en una misma dirección. Después llevemos la corriente hasta cero, por lo que la intensidad de campo H también será cero. La curva de B vs. H , llamada curva de magnetización, sigue la trayectoria ab , como podemos notar el punto que corresponde a una intensidad de campo $H=0$, tiene un valor de B diferente de cero, aun cuando el campo magnético externo sea $B_0=0$. En este punto, se dice que el hierro tiene una magnetización remanente o residual. Si se invierte el campo magnético externo y se incrementa su intensidad con una corriente en sentido inverso, los dominios dentro de la muestra se reorientarán hasta llegar a desmagnetizarse en el punto “ c ” donde $B=0$. Al seguir aumentando la corriente ahora en sentido opuesto, el hierro es magnetizado en forma inversa, aproximándose a la saturación en el punto “ d ”. Una secuencia similar

de eventos ocurre cuando la corriente se reduce hasta cero y entonces se incrementa en la dirección original, siguiendo la trayectoria *def*. Si la corriente se aumenta lo suficiente, la curva de magnetización regresa al punto “a”, donde se tiene nuevamente la máxima magnetización. Al ciclo cerrado que se muestra en la figura 4.11 se le denomina *lazo de histéresis*. Su forma y tamaño dependen de la sustancia ferromagnética y de la intensidad del campo magnético aplicado.

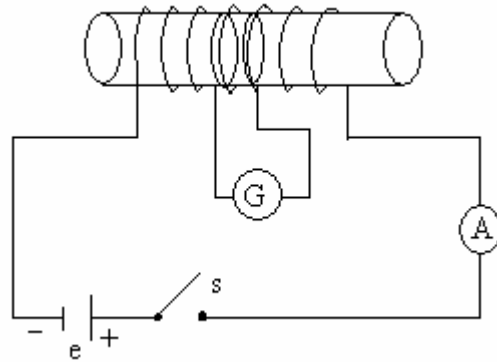


Figura 4.11.1 Bobina solenoidal excitada con C.D. con un galvanómetro en el circuito secundario para medir el flujo magnético.

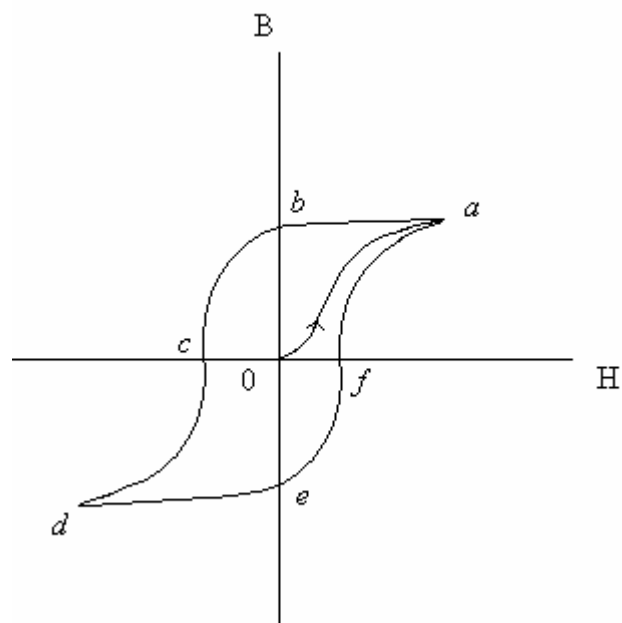


Figura 4.11.2 Lazo de histéresis para un material ferromagnético

CAPITULO V

ECUACIONES DE MAXWELL.

5.1 Ley de Faraday y primera ecuación de Maxwell.

Las ecuaciones de Maxwell se numeran por conveniencia en su presentación, esto implica que su orden no obedece a razones históricas o a su importancia, existen textos que no las numeran, y otros que les asignan números diferentes a los que aquí les asignaremos.

El trabajo experimental de Maxwell realizado en Inglaterra en el año de 1831, mostraba que un campo magnético variante en el tiempo que ligaba a una espira (conductor cerrado) inducía un voltaje en dicha espira al que se le llamó fuerza electromotriz (fem). La fem inducida es proporcional a la razón de cambio del flujo magnético a través de la espira. La variación en el tiempo del flujo magnético que enlaza a la espira puede hacerse de dos maneras. La primera es teniendo una espira fija enlazada por un campo magnético variante en el tiempo, el cual es producido por una corriente variante en el tiempo, que bien puede ser una corriente alterna sinusoidal, la segunda forma es a partir de un campo magnético uniforme como es un imán permanente, lo acercamos y retiramos de una espira, se obtiene el mismo resultado si se mantiene quieto el imán y se mueve la espira. La polaridad del voltaje inducido está determinada por la ley de Lenz que se enuncia de la manera siguiente: La polaridad del voltaje es tal que la corriente en la espira produce un campo magnético que se opone al cambio en el flujo, la ley de Faraday se representa matemáticamente mediante la ecuación (5.1.1)

$$e = - \frac{d\phi}{dt} \quad (5.1.1)$$

El signo menos es el resultado de la interpretación de la ley de Lenz. Si el flujo enlazara N espiras, el lado derecho de la ecuación (5.1.1) estará multiplicado por N, esto es:

$$e = -N \frac{d\phi}{dt} \quad (5.1.2)$$

Consideremos el circuito cerrado de la figura 5.1.1a con una longitud l , el flujo magnético que enlaza dicho circuito esta dado por la ecuación

$$\phi = \iint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (5.1.3)$$

Esto implica que el flujo ϕ esta dado por la componente normal de la densidad de flujo magnético \mathbf{B} sobre cualquier superficie A, no necesariamente plana, la cual esta limitada por el circuito cerrado de longitud l .

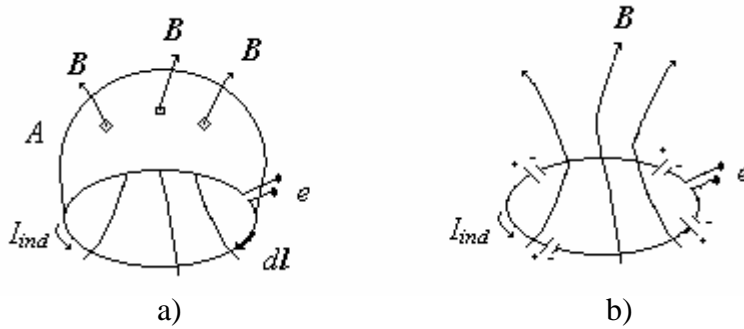


Figura 5.1.1

La fem se define como

$$fem = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (5.1.4)$$

Y como puede notarse según la sección 2.4 es la diferencia de potencial o voltaje, (aunque quienes aplican las normas a rajatabla se escandalicen, afirmando que la norma establece que se le denomina tensión) a lo largo de una trayectoria cerrada específica. Entonces si una fem es inducida en el circuito de la figura 5.1.1a, debe existir una fuerza que obra sobre los electrones de valencia del conductor cerrado moviéndose alrededor de este, esta fuerza es debida a la componente tangencial al circuito, del campo eléctrico \mathbf{E} .

Igualando las ecuaciones (5.1.4) y (5.1.1) tendremos

$$fem = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{d\phi}{dt} \quad (5.1.5)$$

Sustituyendo la ecuación (5.1.3) en la ecuación (5.1.5)

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (5.1.6)$$

La ecuación (5.1.6) corresponde a la forma integral de la 1ª ley de Maxwell, la derivada del flujo magnético se expresa como una derivada parcial en virtud de que este además de ser una variable temporal, es una variable espacial.

Debido a que cada segmento $d\mathbf{L}$ del lazo cerrado de conductor contribuye al voltaje inducido, podemos pensar que la corriente inducida es producida por una serie de baterías a lo largo de todo el lazo con la polaridad apropiada como se muestra en la figura 5.1.1b.

Podemos expresar la ecuación (5.1.6) en forma diferencial, la cual es independiente de la trayectoria seguida y válida para cualquier punto del espacio, aplicando el teorema de Stokes

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} = \int_s (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{A} \quad (\text{Teorema de Stokes})$$

Tendremos

$$\iint (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (5.1.7)$$

Como las variables de integración son espaciales, la derivación se puede hacer antes de la integración ya que esta se hace respecto del tiempo y la ecuación (5.1.7) nos queda

$$\iint (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A} = - \iint \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

En virtud de que esto debe ser verdadero para cualquier superficie, los integrandos pueden ser igualados

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.1.8)$$

La ecuación (5.1.8) nos representa la 1ª ecuación de Maxwell en forma puntual o diferencial.

5.2 Ley de Gauss y segunda ecuación de Maxwell.

La ley de Gauss enunciada en la sección 2.2 esta dada por la ecuación

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q \quad (5.2.1)$$

Y nos indica que el flujo eléctrico que cruza una superficie cerrada es numéricamente igual a la carga encerrada por dicha superficie.

Si la carga Q está distribuida de manera continua a través de un volumen v , la ley de Gauss se representa

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q = \int_{vol} \rho dv \quad (5.2.2)$$

Donde ρ es la densidad volumétrica de carga en coulombs por metro cúbico y v es el volumen encerrado por la superficie A . Aplicando el teorema de la divergencia enunciado en la sección 2.2, al 1º miembro de la ecuación (5.2.2)

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \int_{vol} \nabla \cdot \mathbf{D} dv$$

nos queda

$$\int_{vol} \nabla \cdot \mathbf{D} dv = \int_{vol} \rho dv \quad (5.2.3)$$

Ya que la ecuación (5.2.3) se debe cumplir para cualesquier volumen, entonces podemos igualar sus integrandos

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (5.2.4)$$

La ecuación (5.2.4) es la expresión matemática de la ley de Gauss en forma diferencial, la cual relaciona la densidad de flujo eléctrico con la densidad volumétrica de carga en un punto, pero lo más interesante es que esta expresión corresponde a la segunda ecuación de Maxwell.

5.3 Ley de Ampère y tercera ecuación de Maxwell.

La ley experimental de Faraday, la cual muestra que un campo magnético variante en el tiempo produce un campo eléctrico, fue la base para la primera ecuación de Maxwell, y el apoyo para el desarrollo teórico de Maxwell para establecer su tercera ecuación que establece que a partir de un campo eléctrico variante en el tiempo se puede generar un campo magnético, la cual es una generalización de la ley de Ampère que establece que el campo magnético a través de una trayectoria cerrada es igual a la corriente encerrada por dicha trayectoria, como se indica en la ecuación (4.8.1), podemos expresar la mencionada ley de Ampère en función de la intensidad de campo magnético \mathbf{H} ; esto es

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I \quad (5.3.1)$$

Para corrientes distribuidas en toda una superficie, la ley de Ampère se puede escribir de la manera siguiente

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} \quad (5.3.2)$$

Aplicando el teorema de Stokes al 1^{er} miembro de la ecuación (5.3.2)

$$\int_s (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{A} = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$$

Dado que la ecuación anterior es válida para cualesquier superficie, entonces podemos igualar sus integrandos

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (5.3.3)$$

donde \mathbf{J} puede ser una densidad de corriente de conducción ($\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$) o una densidad de corriente de convección ($\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$).

La ecuación (5.3.3), es la expresión matemática de la ley circuital de Ampère en forma puntual o diferencial para campos invariantes en el tiempo.

Corriente de desplazamiento.

Podemos demostrar que (5.3.3) es inadecuada para condiciones que varían con el tiempo, si obtenemos la divergencia en ambos lados de la ecuación,

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} \equiv 0 = \nabla \cdot \mathbf{J} \quad (5.3.4)$$

de nuestro curso de cálculo vectorial podemos recordar que la divergencia del rotacional de cualquier campo vectorial es igual a cero, por lo tanto $\nabla \cdot \mathbf{J}$ es también cero. No obstante la ecuación de continuidad (3.2.2) $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$, muestra que (5.3.3) es

verdadera si y sólo si $\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$. Sin embargo la divergencia de \mathbf{J} puede no ser cero, esto

implica que la forma puntual de la ley circuital de Ampère dada por la ecuación (5.3.3) no es general, podemos hacer que la ley de Ampère sea lo suficientemente general incluyendo campos variantes en el tiempo por la adición de un término, el término que agregaremos debe ser una densidad de corriente a la que se le ha denominado densidad de corriente de desplazamiento y se representa por \mathbf{J}_D , ahora tendremos que

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_D \quad (5.3.5)$$

y al aplicar la divergencia en ambos lados de la ecuación (5.3.5) se tiene

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{J}_D \quad (5.3.6)$$

si sustituimos la ecuación de continuidad (3.2.2) en la ecuación (5.3.6) tendremos

$$0 = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_D \quad (5.3.7)$$

De acuerdo a lo que se vio en la sección 2.2, la densidad volumétrica de carga ρ_v es igual a la divergencia de la densidad de flujo eléctrico \mathbf{D} , esto es $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$, sustituyendo esta última expresión en la ecuación (5.3.7)

$$0 = -\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{D})}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_D \quad (5.3.8)$$

Dado que la divergencia de \mathbf{D} es una derivación respecto al espacio y no respecto al tiempo, podemos sacar el operador nabla y obtener primero la derivada de \mathbf{D} respecto al tiempo, esto es

$$0 = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_D$$

de donde se tiene que

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}_D \quad (5.3.9)$$

Sustituyendo la ecuación (5.3.9) en la ecuación (5.3.5)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.3.10)$$

La ecuación (5.3.10) constituye la ley de Ampère de manera generalizada en forma puntual o diferencial, la forma integral será

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} \quad (5.3.11)$$

5.4 Flujo magnético y cuarta ecuación de Maxwell.

Como resultado de la aplicación de la ley de Gauss en campos eléctricos se obtuvo la que llamamos segunda ley de Maxwell, en la sección 4.7 aplicamos la ley de Gauss a campos magnéticos y se obtuvo como resultado la ecuación (4.7.1)

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

la ecuación anterior representa la 4ª ecuación de Maxwell en forma integral, al aplicar el teorema de la divergencia a la ecuación (4.7.1), concluimos que

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

la ecuación anterior que identificamos con el número (4.7.2), es la cuarta ecuación de Maxwell en forma puntual.

Las ecuaciones de Maxwell representan la teoría unificada del electromagnetismo, pues estas fueron deducidas a partir de las leyes del electromagnetismo, que previamente habían sido enunciadas por Faraday, Biot/Savart, Gauss y Ampère, aunque en realidad James Clerk Maxwell se inspiró en el trabajo experimental de Michael

Faraday y en la imagen metal de las líneas de fuerza que este introdujo en el desarrollo de su teoría. Podemos representar la teoría de Maxwell mediante las cuatro ecuaciones que desarrolló representándolas en las formas diferencial e integral como se muestran a continuación:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.1.8)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} \quad (5.1.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad (5.2.4)$$

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \int_{vol} \rho_v \cdot dv \quad (5.2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.3.10)$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} \quad (5.3.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.7.2)$$

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (4.7.1)$$

5.5 Ecuaciones de Maxwell en medios materiales.

En las secciones 3.5 y 4.11 hemos mostrado que la polarización \mathbf{P} y la magnetización \mathbf{M} pueden actuar como fuentes de campo eléctrico y magnético respectivamente. Así encontramos expresiones generalizadas para \mathbf{D} y \mathbf{H} .

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (3.5.6)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (4.11.6)$$

Las anteriores ecuaciones son válidas para cualquier medio, esto es, las restricciones de linealidad, homogeneidad e isotropía, son ignoradas. Las ecuaciones de Maxwell también se pueden representar en forma generalizada, quedando de la manera siguiente:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho - \nabla \cdot \mathbf{P})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Note que las anteriores ecuaciones muestran explícitamente la contribución del medio, así, $\nabla \cdot \mathbf{P}$ actúa como una densidad de carga, $\nabla \times \mathbf{M}$ y $\partial \mathbf{P} / \partial t$ como una densidad de corriente, note además que estas están expresadas en términos de \mathbf{E} y \mathbf{B} en lugar de \mathbf{D} y \mathbf{H} como las habíamos expresado anteriormente.

CAPITULO VI

RELACIÓN ENTRE LA TEORÍA DE CIRCUITOS Y LAS ECUACIONES DE MAXWELL.**6.1 Teoría de campo aplicada a circuitos eléctricos.**

En el análisis de circuitos eléctricos se estudian los parámetros tensión, (diferencia de potencial) V , entre los terminales de sus elementos y la corriente I que pasa a través de ellos; mientras que en la teoría de campos se estudian los vectores de campo \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{H} y \mathbf{J} en función de la posición y en ciertos casos también en función del tiempo. En esta unidad veremos como se relacionan la teoría de campos con la de circuitos eléctricos.

Como primer ejemplo consideremos una varilla de material conductor de longitud " l " y área de sección transversal " A ", como se muestra en la figura 6.1.1. En la teoría de circuitos de baja frecuencia es suficiente describir la varilla en términos de su resistencia eléctrica " R ". La diferencia de potencial entre los extremos de la varilla está determinada por la ley de Ohm

$$V=IR \quad (6.1.1)$$

donde I es la corriente eléctrica a través de la varilla.

Haciendo el análisis desde el punto de vista de campos, consideremos el valor del campo eléctrico \mathbf{E} en un punto de la varilla. De acuerdo a lo que se vio en la sección (3.4) la ley de Ohm en un punto está dada por:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \quad V/m \quad (6.1.2)$$

Donde: \mathbf{J} =densidad de corriente de conducción en un punto en (A/m^2).
 σ =conductividad del medio material en ($1/\Omega.m$).

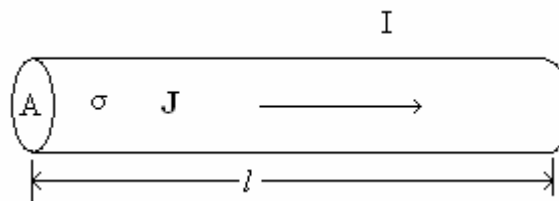


Figura 6.1.1 Varilla conductora.

Si integramos la ecuación (6.1.2) a lo largo del conductor obtenemos la diferencia de potencial entre sus extremos, así

$$V = \int \mathbf{E}.d\mathbf{l} = \int \left(\frac{\mathbf{J}}{\sigma} \right).d\mathbf{l}$$

suponiendo densidad de corriente uniforme a lo largo del conductor

$$V = \frac{Jl}{\sigma} \Rightarrow \text{multiplicando y dividiendo por } A, \text{ tendremos}$$

$$V = \frac{JAl}{\sigma A} = (JA) \frac{l}{\sigma A} = I \left(\frac{l}{\sigma A} \right) \quad \text{donde: } \frac{l}{\sigma A} = R = \text{Resistencia del conductor en } \Omega.$$

Luego entonces

$$V=IR$$

La cual es la conocida ley de Ohm, ecuación (6.1.1).

Con la finalidad de generalizar las relaciones de circuitos eléctricos con las de campos consideremos el circuito serie mostrado en la figura 6.1.2

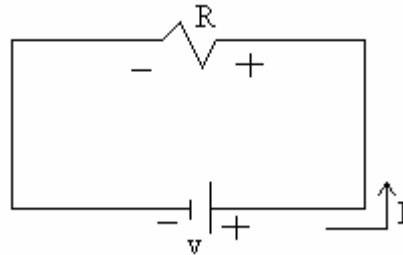


Figura 6.1.2

En cualquier punto se tiene por la ley de Ohm que $\mathbf{J}/\sigma = \mathbf{E}$, y en general, el campo total \mathbf{E} puede deberse no sólo a cargas estáticas, sino también a otras causas, como por ejemplo la reacción química en una pila, luego

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_e$$

Donde :

\mathbf{E}_c =Campo eléctrico estático debido a cargas.

\mathbf{E}_e =Campo eléctrico generado por una pila (el subíndice indica que es un campo generador de fuerza electromotriz f.e.m.)

Si sustituimos $\mathbf{J} = \mathbf{I}/A$ y $\sigma = l/RA$ en la ecuación (6.1.2) tenemos:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \frac{l/A}{l/RA} = \mathbf{l}(R/l) = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_e \quad (6.1.4)$$

La integración de (7.1.4) alrededor del circuito completo nos da

$$\oint \mathbf{E}_c \cdot d\mathbf{l} + \oint \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} = I \oint \frac{R}{l} d\mathbf{l} \quad (6.1.5)$$

donde (R/l) =Resistencia por metro de longitud

El primer término como se vio en la sección 2.6, es cero, no así el segundo que haciendo un poco de memoria podemos darnos cuenta que se trata de una f.e.m. y el lado derecho de la ecuación (6.1.5) es igual a la caída total alrededor del circuito, entonces

$$\text{f.e.m.} = e = IR$$

en general para un circuito cerrado que contenga muchos resistores y fuentes de f.e.m.

$$\Sigma e = I \Sigma R$$

Que como recordaremos es la ley de voltajes de Kirchoff.

Analicemos a continuación un circuito en serie constituido por un inductor, un resistor y un capacitor, pero antes de eso definamos potencial magnético vectorial.

El concepto de potencial magnético vectorial surge de $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, luego si $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ entonces efectivamente $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$, se puede demostrar que

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{vol} \mathbf{J} dV \quad \text{que se puede extender a} \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{vol} \mathbf{I} dl$$

Donde \mathbf{A} es conocido como potencial magnético vectorial

Recordemos que para cargas eléctricas estáticas $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, de ahí que \mathbf{E} puede expresarse como el negativo del gradiente de una función escalar llamada potencial, esto es, $\mathbf{E} = -\nabla V$, luego $\nabla \times (-\nabla V) = 0$.

Sin embargo para situaciones que cambian con el tiempo

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (6.1.6)$$

Puesto que $\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$, la relación $\mathbf{E} = -\nabla V$ no es suficiente para campos variantes con el tiempo, se requiere un término adicional y puede encontrarse de la manera siguiente: puesto que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, la ecuación (6.1.6) se puede escribir como

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t} \quad \text{de donde} \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t} = 0$$

Que también podemos escribir

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad \text{y entonces el término adicional es:} \quad \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right), \text{ y consecuentemente}$$

$$-\nabla V = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{luego} \quad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (6.1.7)$$

Para el caso de campos estáticos invariantes en el tiempo la ecuación (6.1.7) se convierte en la ya conocida relación

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

Ahora si consideremos el circuito en serie constituido por el resistor, el inductor y el capacitor, mostrado en la figura 6.1.3, como lo habíamos prometido.

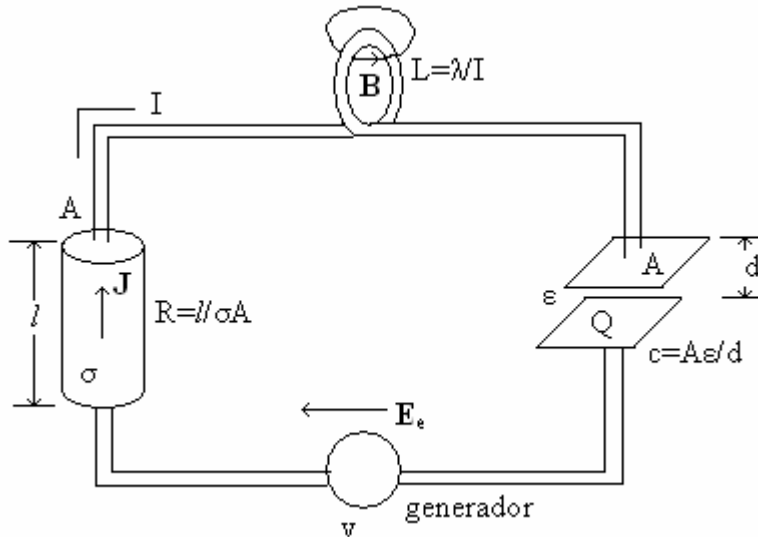


Figura 6.1.3 Circuito RLC

Considere los elementos ideales, es decir toda la resistencia está confinada en el resistor, toda la inductancia al inductor, toda la capacitancia al capacitor y toda la f.e.m. al generador.

$$\mathbf{E}_{\text{total}} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_e = \mathbf{E}_{\text{total}} - \mathbf{E}$$

Y dado que $\mathbf{E}_{\text{total}} = \mathbf{J} / \sigma$ y $\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ entonces

$$\mathbf{E}_e = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} + \nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{Integrando alrededor del circuito en el sentido horario}$$

$$\oint \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} = \oint \left(\frac{\mathbf{J}}{\sigma} \right) \cdot d\mathbf{l} + \oint (\nabla V) \cdot d\mathbf{l} + \oint \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{l} \quad (6.1.8)$$

Se puede observar que el lado izquierdo de la ecuación (6.1.8) es la fem inducida “e”, integrando los dos primeros términos del lado derecho y dado que $\nabla V = -\mathbf{E}$, se tiene

$$e = \frac{Jl}{\sigma} + Ed + \frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{El último término se puede expresar como:}$$

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{dI}{dt} \oint \left(\frac{\mathbf{A}}{I} \right) \cdot d\mathbf{l} = L \frac{dI}{dt} \quad \text{Donde:}$$

$$\oint \left(\frac{\mathbf{A}}{I} \right) \cdot d\mathbf{l} = L = \text{Inductancia del circuito.}$$

Esto se puede demostrar aplicando el teorema de Stokes a la integral

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d}{dt} \int_s (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \quad \text{y dado que } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \text{ entonces}$$

$$\frac{d}{dt} \int_s (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{y como} \quad \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = N\phi = \lambda \quad \text{entonces}$$

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d\lambda}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{d\lambda}{dt} = L \frac{dI}{dt}$$

Recordemos que $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} \Rightarrow E = \frac{D}{\varepsilon}$ luego

$$e = \frac{Il}{a\sigma} + \frac{Dd}{\varepsilon} + L \frac{dI}{dt} = RI + \frac{Dd}{\varepsilon} + L \frac{dI}{dt} \quad \text{podemos expresar } D=Q/a \text{ y tendremos:}$$

$$e = RI + \frac{(Q/a)d}{\varepsilon} + L \frac{dI}{dt} = RI + \frac{Q}{a\varepsilon/d} + L \frac{dI}{dt} = RI + \frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt} \quad \text{y como } Q = \int Idt$$

Entonces $e = RI + \frac{1}{C} \int Idt + L \frac{dI}{dt}$

Como recordaremos de nuestro curso de circuitos eléctricos la ecuación anterior nos representa el resultado de aplicar la ley de voltajes de Kirchhoff al circuito serie RLC, sólo que ahora la obtuvimos a partir de las relaciones de campos.

6.2 Ecuaciones de Maxwell como una generalización de las ecuaciones de circuitos.

Las cuatro ecuaciones de Maxwell deducidas anteriormente, una a partir de la ley de Ampère, otra a partir de la ley de Faraday y las dos restantes a partir de la ley de Gauss; son de gran importancia en el análisis de la mayor parte de los problemas que involucran el electromagnetismo.

La ley de Ampère que relaciona la integral de línea de \mathbf{H} en torno a una trayectoria cerrada en cuyo interior se encuentra la corriente I , está dada por

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (6.2.1)$$

Si sustituimos la corriente I por la integral de superficie de la densidad de corriente de conducción \mathbf{J} , en donde la superficie total podrá ser la encerrada por la trayectoria de integración de \mathbf{H} y entonces tendremos

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} \quad (6.2.2)$$

Hicimos aun más general la ecuación (6.2.2), sumando la corriente de desplazamiento y entonces

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{A} \quad (6.2.3)$$

Aplicando el teorema de Stokes a la expresión (6.2.3), la cual constituye la ecuación de Maxwell obtenida a partir de la ley de Ampère en su forma integral, obtendremos dicha ecuación de Maxwell en su forma puntual o diferencial, esto es:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (6.2.4)$$

Como ya vimos en anterior unidad, la ley de Faraday que relaciona la fem inducida “e” en un circuito con la rapidez de cambio del flujo magnético o de los encadenamientos de flujo magnético que enlaza el circuito está dada por

$$e = -\frac{d\lambda}{dt} \quad (6.2.5)$$

Si sustituimos los encadenamientos de flujo λ por la integral de superficie de B en el área limitada por el circuito, tendremos

$$e = -\frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (6.2.6)$$

Y si sustituimos “e” por la integral de línea de E alrededor del circuito, tendremos

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_s \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{A} \quad (6.2.7)$$

Esta relación de campo es una generalización de la ley de Faraday para circuitos (6.2.5). La ecuación (6.2.7) es la ecuación de Maxwell deducida a partir de la ley de Faraday representada en forma integral, la relación puntual se obtiene por la aplicación del teorema de Stokes del primer miembro de la ecuación (6.2.7), lo cual resulta ser

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (6.2.8)$$

Como se expuso con anterioridad, la ley de Gauss que relaciona la integral de superficie de la densidad de flujo eléctrico D con la carga Q encerrada, está dada por

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q \quad (6.2.9)$$

Si sustituimos Q en la ecuación (6.2.9) por su forma más general que es la integral de volumen de la densidad volumétrica de carga “ ρ_v ” evaluada en todo el volumen encerrado por la superficie “s”, (6.2.9) nos queda

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \int_v \rho_v \, dv \quad (6.2.10)$$

La ecuación (6.2.10) es una relación de campo que constituye la ecuación de Maxwell en forma integral aplicada a un volumen finito “v” obtenida a partir de la ley de Gauss. Si aplicamos el teorema de la divergencia al primer miembro de la ecuación (6.2.10), obtenemos la correspondiente ecuación diferencial que relaciona las cantidades de campo en un punto, esto es

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad (6.2.11)$$

Para campos magnéticos, la integral de superficie de \mathbf{B} sobre una superficie cerrada “s” resulta ser cero. Entonces la ley de Gauss aplicada a un campo magnético es

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (6.2.12)$$

Aplicando nuevamente el teorema de la divergencia, obtenemos la forma puntual, así

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.2.13)$$

El desarrollo de las ecuaciones de Maxwell como una generalización de las relaciones de circuito implican un razonamiento inductivo y un razonamiento físico. Para el desarrollo de dichas ecuaciones Maxwell se basó en el trabajo experimental de Faraday, utilizando también analogías con sistemas hidráulicos y mecánicos que le auxiliaron en la formulación de sus ideas.

6.3 Ecuaciones de Maxwell en campos con variación armónica.

De la forma general de las ecuaciones de Maxwell en su forma integral y diferencial podemos particularizar para diferentes tipos de campos, utilizando inclusive otras relaciones fundamentales importantes como son:

La ley de Ohm en un punto

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

La relación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

Las relaciones de fuerza

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad \text{y} \quad d\mathbf{F} = (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})i$$

Las relaciones entre \mathbf{E} y \mathbf{D} y entre \mathbf{B} y \mathbf{H}

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

Entonces para campos con variación armónica las ecuaciones (6.2.3) y (6.2.4) se pueden expresar en forma fasorial

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (\sigma + j\omega\epsilon) \int_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \quad (6.3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E} \quad (6.3.2)$$

Que representan la forma integral y puntual respectivamente de una de las ecuaciones de Maxwell.

De manera análoga (6.2.7) y (6.2.8) se pueden expresar en forma fasorial para campos con variación armónica, como se muestra a continuación:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -j\omega\mu \int_s \mathbf{H} \cdot d\mathbf{A} \quad (6.3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu \mathbf{H} \quad (6.3.4)$$

Las ecuaciones (6.2.10) y (6.2.11) y las (6.2.12) y (6.2.13) permanecen inalteradas, esto es:

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \int_v \rho_v \, dv \quad (6.3.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad (6.3.6)$$

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (6.3.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.3.8)$$